



Analyse et commande de systèmes non linéaires à retards

Luis Alejandro Marquez-Martinez

► To cite this version:

Luis Alejandro Marquez-Martinez. Analyse et commande de systèmes non linéaires à retards. Automatique / Robotique. Université de Nantes, 2000. Français. NNT: . tel-00269005

HAL Id: tel-00269005

<https://theses.hal.science/tel-00269005>

Submitted on 1 Apr 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR
DE NANTES

2000

Thèse de DOCTORAT

Discipline : Sciences de l'Ingénieur
Spécialité : Automatique et Informatique Appliquée

présentée et soutenue publiquement par

MARQUEZ MARTINEZ LUIS ALEJANDRO

*le 14 Juin 2000
à l'École Centrale de Nantes*

Analyse et commande des systèmes non linéaires à retards

Jury :

<i>Président :</i>	Luc Dugard	Directeur de Recherche, CNRS, LAG
<i>Rapporteurs</i>	Jean-Pierre Richard	Professeur, Ecole Centrale, Lille
	Giuseppe Conte	Professeur, Université de Ancône, Italie
<i>Examineurs</i>	Jean-François Lafay	Professeur, École Centrale de Nantes
	Rogelio Lozano	Directeur de Recherche CNRS, Compiègne
	Claude Moog	Chargé de Recherche, CNRS, Nantes
	Jean-Pierre Humeau	Professeur, Université de Nantes

Directeur de thèse : Claude Moog

Laboratoire : Institut de Recherche en Communications et
Cybernétique de Nantes, UMR CNRS 6597

Adresse : BP 92101, 1 rue de la Noë.
44321 Nantes cedex 3

ED 82-449

Remerciements :

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au laboratoire dont le nom semble avoir convergé vers Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes.

D'abord, je tiens à remercier Claude Moog, qui sur le plan professionnel a toujours su me guider et m'écouter, et sur le plan personnel m'a fait l'honneur de son amitié.

Messieurs Giuseppe Conte et Jean-Pierre Richard sont vivement remerciés d'avoir accepté la tâche de rapporteurs, malgré leur contraintes de temps.

Je remercie aussi messieurs Jean-Pierre Humeau, Rogelio Lozano, Luc Dugard (qui en plus a assuré la Présidence), et Jean-François Lafay d'avoir accepté d'être membres du Jury.

Certains résultats ont été obtenus grâce à des discussions avec P. Zagalak, M. Velasco, E. Aranda et X. Xia mais aussi J. Assan, M. Malabre, U. Kotta, R. Rabah et R. Pothin.

Mon séjour n'aurait pas été aussi agréable sans des amis comme Patosh, Luba et Jeff, Martin Virgilio et Basilio, Luiz Marques, Eva M., Anne et Maël, Eric (E.T.), Sébastien (Faucou et Besnard), Gerhard, Vincent, Manu, Walid, Xavier, Fred, Milan, Luigi, et les copains de "détresse" Cristina García, Domingo, Juanjo, et bien d'autres "sferianos".

L'encouragement et l'amitié que j'ai reçu de la part de Michel Malabre, JF Lafay, Robert Boisliveau, JP Elloy, MF Lucas et JJ Loiseau, ont été d'une grande importance pour moi.

Je ne pourrai pas oublier Mme. Palvadeau et l'ensemble de secrétaires de l'IRC-CyN pour toute l'aide qu'elles m'ont apportée.

Un grand merci à Joaquín Álvarez, pour tant des raisons trop longues à nommer.

Mes remerciements au Peuple du Mexique, qui à travers le CONACyT et le CICESE, m'a donné les moyens financiers d'achever ma formation doctorale.

Finalement, à ce que j'ai de plus précieux au monde : ma famille. Tout d'abord, Verónica, qui a surmonté la solitude, le mal du pays, et bien d'autres choses pour rester à mes côtés, et qui m'a donné Victoria ; puis, mes parents et mes frères qui, par leur soutien et leur solidarité sont toujours restés à mes côtés.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Formalisme mathématique	5
1.1 Rappels	5
1.2 Systèmes non linéaires à retards	10
1.3 L'anneau $\mathcal{K}[\nabla]$	12
1.3.1 Définition	12
1.3.2 Quelques propriétés de base	15
1.3.3 Matrices à éléments dans $\mathcal{K}[\nabla]$	18
1.4 Systèmes à retards modélisés sur $\mathcal{K}[\nabla]$	21
1.5 Définitions supplémentaires	22
1.5.1 Fermeture d'un sous-module	22
1.5.2 Transformations de systèmes	23
1.5.3 Formes exactes, intégrabilité	28
1.6 Contributions par rapport à d'autres travaux	30
1.7 Conclusions	31
2 Propriétés structurelles des SAR	33
2.1 Accessibilité	33
2.1.1 Définition	33
2.1.2 Filtration de \mathcal{M}	35
2.1.3 Contribution	35
2.2 Structure des systèmes à retards	37

2.2.1	Algorithme de structure	37
2.2.2	Systèmes inverses	39
2.3	Lien avec d'autres travaux	40
2.4	Conclusions	41
3	Rejet de perturbations	43
3.1	Définition du problème	43
3.2	Solution statique bicausale	46
3.3	Solution dynamique	48
3.4	Lien avec d'autres travaux	49
3.5	Conclusions	51
4	Linéarisation entrée-sortie	53
4.1	Définition du problème	54
4.2	Solutions par retour de sortie	55
4.3	Solutions par retour d'état	57
4.3.1	Solution par retour d'état statique	58
4.3.2	Solution par retour d'état dynamique	60
4.4	Application à la poursuite de trajectoire	61
4.5	Synthèse d'observateurs	62
4.6	Lien avec d'autres travaux	64
4.7	Conclusions	65
	Conclusion et perspectives	67
A	Note technique pour la revue <i>IEEE Transactions on Automatic Control</i>	75
B	Article pour le congrès IEEE MCCS à Alghero, Italie, avril 1998	83

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	iii
C Rapport interne	91
D Article pour le congrès MTNS, à Perpignan, France, juin 2000	113
E Article pour l'atelier sur les systèmes à retards LTDS 2000, à Ancône, Italie, septembre 2000	121

Liste des tableaux

1.1	Compensateurs causaux par rapport à leur dynamique	26
1.2	Compensateurs non linéaires causaux	28
3.1	Comparaison des contributions au problème de rejet de perturbations de systèmes à retards.	50
3.2	Interprétation de plusieurs définitions de degré relatif.	50
4.1	Solutions proposées pour la linéarisation entrée-sortie	65

Liste d'algorithmes

1	Division d'Euclide sur $\mathcal{K}[\nabla]$	16
2	Inversion d'une matrice à éléments dans $\mathcal{K}[\nabla]$	20
3	Algorithme de structure pour les syst. à retards.	38
4	Linéarisation par injections additives de sortie.	56

Introduction générale

Le terme “cybernétique” doit sa signification actuelle au célèbre ouvrage de Norbert Wiener *Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine* (1948). C’est dans ce cadre-là que s’inscrit l’*automatique*, qui peut être vue comme l’ensemble des méthodes pour trouver des solutions à des idéalizations mathématiques de problèmes posés par l’automatisation, c.-à-d., l’art de rendre automatique un processus.

L’automatique est une science à part entière : bien qu’elle ait ses origines dans des besoins pratiques d’automatisation des processus industriels, le fait d’avoir créé des modèles abstraits des problèmes d’automatisation lui a permis d’élargir son champ d’action, car ces modèles s’appliquent aussi bien dans d’autres domaines, comme l’économie, la biologie, la dynamique des populations, l’épidémiologie, etc...

Au départ, l’automatique se développa en utilisant des modèles *linéaires*, —où la sortie est proportionnelle à l’entrée— d’abord ne considérant que les systèmes avec une seule entrée et une seule sortie, puis, les systèmes avec plusieurs entrées et sorties. Mais ce n’est qu’avec l’introduction de la notion d’*état*, dans les années soixantes, que l’automatique a connu une véritable expansion, surtout dans le cas linéaire. Ceci est justifiable car, bien que la nature des phénomènes de la physique ou des sciences de l’ingénieur soit, en général, non linéaire, pour la plupart des applications courantes, un *modèle linéaire* donne une bonne approximation du *processus réel*.

Cependant, dans certains cas, cette approximation linéaire n’est plus satisfaisante. En effet, lorsque le point de travail est près d’une forte non linéarité, ou que l’on demande au système d’accomplir des tâches très sophistiquées, le modèle linéaire conduit à de mauvaises performances. De plus, une modélisation par des équations linéaires risque d’effacer des phénomènes que les équations linéaires ne peuvent pas prendre en compte.

C’est ainsi que la théorie des systèmes non linéaires commença à se développer. Une des premières théories a été une extension de l’approche dite

géométrique du cas linéaire qui a permis de résoudre un nombre important de problèmes (voir p.ex. [24]). Cependant, les solutions obtenues par cette approche n'étaient pas toujours simples à mettre en œuvre, et elle se montrait inefficace pour s'attaquer à certains problèmes, comme par exemple l'inversion d'un système. C'est en cherchant une solution à ce dernier, que des nouveaux outils mathématiques ont été développés : l'approche *algébrique* était née. L'avantage de cette approche est la structure "linéaire" ainsi obtenue pour analyser les systèmes non linéaires. C'est à partir de cette base, que des outils différentiels-algébriques ont été développés, grâce aux travaux de plusieurs chercheurs (voir p.ex., [10]).

Tous ces travaux ont considéré que les systèmes étaient gouvernés par un principe de causalité, selon lequel l'évolution de l'état du système est indépendant de son passé et n'est déterminée que par l'état présent.

Cependant, encore une fois, ceci n'est qu'une approximation de la réalité, et un modèle plus réaliste doit inclure au moins une partie de l'histoire du système. Dans ce cas-là, on parle de systèmes à retards.

La classe de systèmes concernée est très large. On peut même affirmer qu'il y a des retards associés à tout processus réel, en raison principalement du temps de réaction des composants (capteurs, actionneurs,...) et les phénomènes de transport (de matière, d'information,...).

Lorsqu'on veut appliquer les techniques classiques de la commande sur cette classe de systèmes, on retrouve des compensateurs qui demandent la connaissance des valeurs futures de l'état du système. Pour contourner ce problème, il est très courant dans la littérature de trouver des *prédicteurs d'état*, la plupart inspirés du travail de Smith [57]. Le problème est, d'un côté, que cette approche est très sensible aux variations paramétriques et demande que le système soit stable en boucle fermée. D'un autre côté, tel qu'il sera montré tout au long de ce rapport, il est parfois possible de résoudre des problèmes de commande avec des solutions causales (et donc, l'emploi d'un prédicteur est superflu).

Ce travail de thèse a pour but le développement des outils mathématiques permettant de caractériser l'existence des solutions aux problèmes de la commande, qui ne font pas appel aux prédicteurs d'état, et de les synthétiser.

Pour ce faire, une nouvelle analyse pour une classe très large de systèmes non linéaires à retards a été développée. Elle est introduite d'une façon naturelle à partir des connaissances standard de systèmes non linéaires sans retard [10] et de systèmes linéaires à retards.

Avec cette approche on a analysé quelques propriétés structurelles d'une

classe étendue de systèmes à retards, et on a trouvé des solutions causales à divers problèmes de la commande de ces systèmes.

Le contenu de cette thèse est organisé de la façon suivante.

Plan

Une contribution majeure de ce travail de thèse, à savoir les définitions et les outils mathématiques que l'on a développés pour l'analyse de systèmes à retards, sera présentée dans le premier Chapitre, après quelques rappels mathématiques.

Puis, dans le Chapitre 2, on va s'intéresser à deux propriétés structurelles des systèmes à retards : l'accessibilité et l'inversibilité.

L'accessibilité est une condition nécessaire pour la commandabilité. Elle a été d'abord définie sous un formalisme géométrique [23, 58], puis à l'aide des outils algébriques [3, 4]. Cette notion est étendue aux systèmes à retards, et une condition suffisante, dont la nécessité est conjecturée, est proposée.

L'inversion d'un système permet, soit de trouver les entrées nécessaires pour obtenir une sortie particulière, soit de retrouver les entrées qui ont été appliquées à partir de la mesure des sorties. Ce problème a déjà été abordé dans [14], où des conditions très faibles, mais non constructives ont été présentées. Une extension de l'algorithme de Singh nous a permis de proposer des conditions suffisantes, plus restrictives mais constructives sous lesquelles un système inverse existe.

Ces résultats ont fait l'objet de deux publications en revue : [35] pour l'accessibilité, et [41] pour l'inversion.

Ensuite, on s'intéressera à deux problèmes de la commande : le rejet de perturbations et la linéarisation entrée-sortie.

Le problème de rejet de perturbations, traité dans le Chapitre 3, est un des problèmes de base de l'automatique. Son but est de garantir l'accomplissement des objectifs de contrôle malgré l'action des entrées non pilotées (et souvent non mesurées). Il a intéressé de nombreux auteurs depuis relativement longtemps [2, 7, 60, 61]. Nous avons apporté les premières solutions causales à ce problème pour la classe de systèmes à retards [42] : une solution complète par bouclage statique sur l'état est donnée, et une condition suffisante pour l'existence de bouclage dynamique causale a été établie. Récemment [36], cette approche a pu être écrite sous des termes géométriques, ce qui a permis de prouver son équivalence avec les conditions déjà connues

dans le cas linéaire [12].

Finalement, le problème de linéarisation entrée–sortie est abordé dans le quatrième Chapitre. Ce problème avait déjà été traité dans [19], où des conditions très restrictives sont présentées sous une approche géométrique. On a contribué avec des solutions par retour statique et dynamique (d'état et de sortie. Ces contributions sont inédites, bien que des résultats préliminaires puissent être trouvés dans [37]. On finit ce Chapitre avec deux applications concrètes : la synthèse d'un observateur et la poursuite de trajectoire. Ces exemples combinent notre approche avec des résultats disponibles dans la littérature sur la stabilité des systèmes linéaires à retards.

Chapitre 1

Formalisme mathématique

On présente dans ce chapitre les outils mathématiques qui seront la base de notre étude sur les systèmes à retards. Afin de faciliter la lecture de ce document, on va d'abord rappeler quelques notions qui seront utilisées par la suite. Le lecteur intéressé pour plus de détails peut consulter des nombreux ouvrages dont [5, 9, 10, 18, 29, 64]. La classe des systèmes considérée sera présentée dans la section 1.2 avant d'introduire le formalisme mathématique, ce qui sera fait dans les sections 1.3 à 1.5. Finalement, on fera une comparaison entre l'approche présentée et des travaux trouvés dans la littérature, valables pour d'autres classes de systèmes.

1.1 Rappels

Algèbre

Définition 1 (Semigroupe) *Un semigroupe est un ensemble G muni d'une loi de composition interne, dont la seule contrainte est d'être associative.*

Définition 2 (Groupe) *Un groupe est un ensemble G non vide, muni d'une loi de composition interne (notée $*$, $+$, \times , \circ , ...) satisfaisant aux axiomes suivants :*

1. *associativité : pour tout $(a, b, c) \in G^3$, $(a * b) * c = a * (b * c)$;*
2. *élément neutre e : il existe un élément $e \in G$ tel que, pour tout $a \in G$, $a * e = e * a = a$;*
3. *élément symétrique a^{-1} : pour tout $a \in G$, il existe $a^{-1} \in G$, $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$;*

Définition 3 (Groupe abélien) *Un groupe, dont la loi de composition est commutative ($a * b = b * a$), ayant les propriétés suivantes :*

1. $a * c = b * c \Rightarrow a = b, \quad c * a = c * b \Rightarrow a = b;$
2. $\forall (a, b) \in G^2, \quad \exists x \in G, \quad a * x = x * a = b \quad (x = a^{-1} * b = b * a^{-1}).$

Définition 4 (Anneau) *Un anneau R est un ensemble muni de deux lois de composition interne $S(+, *)$, appelées addition et multiplication, satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *associativité additive : pour tout $a, b, c \in S, (a + b) + c = a + (b + c);$*
2. *commutativité additive : pour tout $a, b \in S, a + b = b + a;$*
3. *élément neutre pour l'addition : il existe un élément $0 \in S$ tel que, pour tout $a \in S, 0 + a = a + 0 = a;$*
4. *inverse additif : pour chaque $a \in S, il existe $-a \in S$ tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0;$$*
5. *associativité multiplicative : pour tout $a, b, c \in S, (a * b) * c = a * (b * c);$*
6. *distributivité à droite et à gauche : pour tout $a, b, c \in S, a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ et $(b + c) * a = (b * a) + (c * a).$*

Un anneau est donc un groupe abélien sous l'addition et un semigroupe sous la multiplication.

Un anneau doit contenir au moins un élément, mais n'a pas besoin d'avoir un élément neutre pour la multiplication ou d'être commutatif.

Par rapport à ses lois de composition, un anneau peut être commutatif, avoir ou non des "diviseurs de zéros", ou encore posséder des inverses par rapport à la loi multiplicative. Ceci se traduit de la façon suivante.

Définition 5 *Un anneau R est*

- *commutatif, si pour tout $x, y \in R, xy = yx;$*
- *unitaire, s'il possède un élément neutre pour la multiplication;*
- *intègre, si pour tout $x, y \in R, xy = 0$ implique $x = 0$ ou $y = 0$ (pas de diviseurs de zéro);*
- *un corps s'il est un anneau unitaire, et si $R^* = R \setminus \{0\}$ est un groupe pour la multiplication.*

A partir d'un anneau R , on peut construire un anneau plus grand, appelé anneau de polynômes. Un polynôme est une somme d'un nombre *fini* de monômes à une ou plusieurs indéterminées. S'il n'y a qu'une seule indéterminée, le polynôme peut s'écrire sous la forme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, avec $a_i \in R$.

Définition 6 (Sous-anneau) Soit R un anneau. Un sous-anneau S de R est un anneau contenu dans R , muni des mêmes lois de composition que R .

Définition 7 (Idéal) Soit R un anneau.

- Un idéal à droite \mathcal{I} de R est un sous-groupe additif de R tel que pour tout $x \in R, y \in \mathcal{I}$ on a : $xy \in \mathcal{I}$.
- Un idéal à gauche \mathcal{I} de R est un sous-groupe additif de R tel que pour tout $x \in R, y \in \mathcal{I}$ on a : $yx \in \mathcal{I}$.
- Un idéal \mathcal{I} de R est un idéal à droite et à gauche.

Sur \mathbb{Z} , l'ensemble $2\mathbb{Z}$ des entiers pairs (divisibles par 2) est un idéal, engendré par $\{2\}$. On remarque que l'élément unité 1 n'appartient pas à $2\mathbb{Z}$. L'exemple suivant souligne la différence entre un idéal et un sous-anneau : $2\mathbb{Z}$ est un idéal de \mathbb{Z} mais n'est pas un sous-anneau, puisque l'élément neutre pour la multiplication n'appartient pas à $2\mathbb{Z}$.

Définition 8 Un idéal principal \mathcal{I} de R est un idéal engendré par un seul élément a : $\mathcal{I} = Ra = \{xa \mid x \in R\}$.

Définition 9 (Anneau principal) Un anneau R est principal si tout idéal de R est principal.

Un exemple d'un anneau principal est \mathbb{Z} , où tout idéal $k\mathbb{Z}$ est engendré par k . Les anneaux de polynômes à plusieurs variables ne sont pas principaux.

Théorème 1 (Division euclidienne) Soit R un anneau et g un polynôme non nul de $R[x]$ tel que le coefficient du terme de plus haut degré en x de g soit inversible sur R . Alors pour tout $f \in R[x]$, il y a deux éléments uniques q et r de $R[x]$, tels que

$$f = qg + r; \quad \text{avec} \quad \deg r < \deg g$$

On remarque que l'on ne peut diviser un polynôme que par un polynôme dont le coefficient dominant est inversible sur l'anneau. Cette restriction disparaît sur ce qu'on appelle les anneaux euclidiens. La caractérisation de cette famille d'anneaux s'appuie sur une notion plus générale de la fonction degré.

Définition 10 (Anneau euclidien) Soit R un anneau. R est un domaine euclidien s'il est intègre et s'il existe une fonction "degré" $\Phi : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfaisant les conditions suivantes.

- i) Si $a, b \in R \setminus \{0\}$, et si b divise a alors $\Phi(b) \leq \Phi(a)$.
- ii) Pour tout $a, b \in R$, $b \neq 0$, il existe des éléments q et r de R uniques, tels que $a = bq + r$, avec $\Phi(r) < \Phi(b)$.

Proposition 1 [22] *Un anneau euclidien est principal.*

Définition 11 *Soit $a, b \in R$ deux éléments d'un anneau R , et D l'ensemble de diviseurs communs à gauche de a et b :*

$$D := \{d \in R \mid \exists x, y \in R, a = xd \text{ et } b = yd\}$$

Etant donné une norme $\Phi(x)$ définie pour tout élément x d'un anneau R , on définit le plus grand commun diviseur (p.g.c.d.) à gauche de a et b comme un élément $d \in D$ satisfaisant

$$\Phi(d) = \max\{\Phi(x), x \in D\}$$

Dans le cas des nombres entiers, la norme usuelle est la norme euclidienne (valeur absolue) ; dans le cas d'un anneau de polynômes, elle est le degré polynômial.

Le p.g.c.d. à droite est défini à partir de l'ensemble des diviseurs communs à droite :

$$D := \{d \in R \mid \exists x, y \in R, a = dx \text{ et } b = dy\}$$

Le p.g.c.d. peut être trouvé à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Définition 12 *Deux polynômes sont dits premiers entre eux à droite ou à gauche si leur p.g.c.d. respectif est 1.*

Théorème 2 (Bezout) *Soit a et b deux éléments d'un anneau de polynômes $R[x]$. Ils sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux polynômes p, q de $R[x]$ tels que*

$$pa + qb = 1$$

Définition 13 (Anneau d'Ore) *Soit R un anneau. Un sous-anneau intègre $\mathcal{D} \subset R$ est un anneau d'Ore à gauche s'il satisfait les propriétés suivantes :*

- i) *Pour $b \in R, a \in \mathcal{D}$, il existe $b' \in R, a' \in \mathcal{D}$ tels que $b'a = a'b$.*
- ii) *Pour $b \in \mathcal{D}$ alors $b' \in \mathcal{D}$.*

Définition 14 (Module) *Un module \mathcal{M} sur un anneau R est un groupe abélien additif satisfaisant*

1. *pour tout $a \in R$ et pour tout $x \in \mathcal{M}$, $ax \in \mathcal{M}$,*
2. *pour tout $a \in R$ et pour tout $x, y \in \mathcal{M}$, $a(x + y) = ax + ay$,*
3. *pour tout $a, b \in R$ et pour tout $x \in \mathcal{M}$, $(a + b)x = ax + bx$,*

- 4. pour tout $a, b \in R$ et pour tout $x \in \mathcal{M}$, $a(bx) = (ab)x$,
- 5. pour tout $x \in \mathcal{M}$, $1x = x$.

Remarque 1

- Si l'anneau est un corps, le module \mathcal{M} est un espace vectoriel. On appelle vecteur, tout élément de \mathcal{M} .
- Une somme quelconque (finie ou infinie) de sous-modules de \mathcal{M} est un sous-module de \mathcal{M} et une intersection quelconque de sous-modules de \mathcal{M} est un sous-module de \mathcal{M} .

Définition 15 Les vecteurs ligne (resp. colonne) $\{v_1, \dots, v_s\}$ sont linéairement indépendants sur un anneau R si $\sum_i a_i v_i = 0$ (resp. $\sum_i v_i a_i = 0$) implique que les coefficients $a_i \in R$ sont tous nuls.

Définition 16 Le rang d'un sous-module $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ est défini comme le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants contenus dans \mathcal{A} .

Fonctions analytiques et méromorphes

Lorsque l'on travaille avec la commande de systèmes non linéaires, on s'intéresse aux situations dans lesquelles les propriétés théoriques en considération sont *génériques*, c'est-à-dire, valables presque partout (sur des voisinages denses dans \mathbb{R}^N , pour N adéquat).

D'un point de vue pratique, les propriétés théoriques d'un système se caractérisent très souvent par des conditions qui exigent que certaines fonctions, obtenues à partir des coefficients du système, ne s'annulent que sur un ensemble non dense. Cette condition peut être obtenue si nous limitons notre attention aux systèmes définis au moyen des fonctions analytiques, ou méromorphes [10].

Une fonction infiniment dérivable est dite C^∞ . Un cas particulier de fonctions C^∞ sont les fonctions *analytiques*.

Définition 17 Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert ; une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite analytique dans un point x_0 de I si elle admet un développement en séries de Taylor dans un voisinage de x_0 . On appelle analytique une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est analytique dans tout point de \mathbb{R} .

Des exemples de fonctions analytiques sont les fonctions polynômiales ; $\tan x$ n'est pas analytique en $x = (2k + 1)\pi/2$, mais elle est *méromorphe*, c'est-à-dire, le quotient de deux fonctions analytiques, (dans en l'occurrence $\sin x$ et $\cos x$).

On note que [10] :

- l’anneau des fonctions C^∞ n’est pas intègre.
- soit une fonction analytique d’une seule variable est identiquement nulle, soit tous ses zéros sont des points isolés.
- l’ensemble de fonctions méromorphes $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est un corps.
- les fonctions méromorphes sont analytiques dans tout leur domaine de définition.

C’est d’ailleurs pour ces raisons, que l’on va travailler seulement avec le corps de fonctions méromorphes.

Causalité

Lorsqu’on veut éviter l’emploi de prédicteurs quand on travaille sur un système à retards, il faut se restreindre à des expressions *non anticipatives* ou *causales*. Dans cette section on va donner une définition de causalité qui a été empruntée à [13].

Définition 18 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $T \in \mathbb{R}_+$ la fonction $f_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie comme suit :

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & , \quad -\infty < t < T \\ 0 & , \quad t \geq T \end{cases}$$

Définition 19 Une fonction $G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ est dite causale (ou non anticipative) si :

$$(G(u))_T = (G(u_T))_T, \quad \forall T \geq 0.$$

Remarque 2 Une conséquence directe de cette définition est que, si l’on a une fonction $\varphi(z(t), z(t \pm 1), \dots)$, elle est causale si et seulement si :

$$\frac{\partial \varphi(\cdot)}{\partial (z(t + \tau))} \equiv 0, \quad \forall \tau > 0.$$

1.2 Systèmes non linéaires à retards

Un système à retards est un système dynamique dont l’évolution dépend non seulement de son état présent, mais aussi de son passé.

Dans ce travail, on va considérer comme système à retards tout objet pouvant être décrit par un ensemble d’équations différentielles et aux différences.

Prenons par exemple le système suivant :

$$\dot{x}(t) = -x(t).$$

La seule connaissance de la valeur de l'état x à l'instant t_0 nous permet de connaître l'état à tout instant t . Etant donné que l'on a besoin d'un seul point (appelé *condition initiale*), le système est de dimension 1.

Si l'on rajoute maintenant un retard h_1 au modèle :

$$\dot{x}(t) = -x(t - h_1)$$

alors la simple connaissance de $x(t_0)$ n'est plus suffisante pour déterminer l'évolution du système : pour cela, il faut connaître les valeurs de l'état à chaque instant dans l'intervalle $[t_0 - h_1, t_0]$. On a besoin maintenant d'un nombre infini de conditions initiales : la dimension du système est infinie.

Les retards apparaissent naturellement dans les modèles des processus réels. Leurs principales sources sont les temps de réaction (des actionneurs, des capteurs, ...) et les phénomènes de transport (de matière, d'information, ...).

Cependant, les retards peuvent être aussi introduits artificiellement. Une raison pour ce faire, est de profiter de leur dynamique plus riche pour résoudre des problèmes qui n'ont pas de solution autrement. Par exemple, on peut considérer le système entrée-sortie suivant [1] :

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = u(t).$$

Ce système ne peut pas être stabilisé par retour de sortie statique. Cependant, avec le compensateur par retour de sortie retardée suivant :

$$u(t) = ky(t - \tau)$$

on obtient des régions de stabilité/instabilité en fonction de la valeur du retard introduit τ .

Finalement, certains systèmes modélisés par d'autres moyens peuvent aussi être modélisés comme des systèmes à retards (par exemple, des systèmes hybrides [44] ou l'équation de propagation d'une onde (wave equation) [17]).

Les retards peuvent être classés selon leur nature. Prenons par exemple les expressions suivantes :

$$x(t - h_1(t)) + x(t - h_2(t)) \\ \int_{t-h}^t x(t - \tau) d\tau.$$

La première contient des termes avec des retards ponctuels $h_i(t)$, tandis que la deuxième montre un terme avec un retard distribué dans un intervalle h . Dans le premier cas, les retards sont aussi appelés

- constants, si $(d/dt) h_i(t) = 0$,
- commensurables, s'ils sont tous des multiples d'un retard de base, c'est-à-dire, s'il existe un réel h et des entiers a_i tels que

$$h_i = a_i h$$

Dans ce travail, on va se restreindre à étudier la classe de systèmes à un nombre fini de retards ponctuels commensurables et constants.

Le fait de considérer seulement le cas des retards commensurables n'est pas trop restrictif, surtout dans le cas d'applications pratiques : en effet, les retards ne peuvent être calculés qu'avec un degré de précision fini, et avec des incertitudes. Alors, tous les retards peuvent être considérés commensurables.

De plus, et sans perte de généralité, on va supposer que l'axe du temps a été ajustée pour avoir seulement des retards entiers ($h = 1$).

Sous ces conditions, la classe de systèmes considérée est définie par :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), x(t-1), \dots, x(t-\tau)) \\ &+ \sum_{i=0}^{\tau} g_i(x(t), x(t-1), \dots, x(t-\tau)) u(t-i) \\ y(t) &= h(x(t), x(t-1), \dots, x(t-\tau)) \\ x(t) &= \varphi(t), \quad u(t) = u_0, \quad \forall t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases} \quad (1.1)$$

L'état $x \in \mathbb{R}^n$, l'entrée de commande $u \in \mathbb{R}^m$, et la sortie $y \in \mathbb{R}^p$. Les éléments de f g_i et h sont des fonctions méromorphes de leurs arguments. $\varphi(t)$ est une fonction continue de conditions initiales.

Remarque 3 *Le fait d'avoir une fonction continue de conditions initiales n'assure pas que les trajectoires engendrées soient C^∞ . Pour cela, des hypothèses supplémentaires sur $\varphi(t)$ sont nécessaires.*

1.3 L'anneau $\mathcal{K}[\nabla]$

1.3.1 Définition

On considère l'ensemble infini des variables réelles

$$\mathcal{C} := \{z_{1,0}, z_{2,0}, \dots, z_{1,1}, z_{2,1}, \dots\}$$

Pour toute paire d'entiers strictement positifs r, τ , on prend les éléments suivants de \mathcal{C}

$$\{z_{i,j}\}, \quad i = 1 \dots r, j = 0 \dots \tau - 1 \quad (1.2)$$

pour représenter les coordonnées d'un point dans $\mathbb{R}^{r\tau}$. Par conséquent, une fonction de $\mathbb{R}^{r\tau}$ vers \mathbb{R} peut être écrite comme une fonction des $r\tau$ variables de \mathcal{C} données par (1.2). On définit $\mathcal{K}_{r,\tau}$ comme étant le corps de toutes les fonctions méromorphes de ces $r\tau$ inconnues. L'opérateur de dérivation partielle, donné par

$$\frac{\partial z_{i,j}}{\partial z_{i',j'}} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = i' \text{ et } j = j' \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

agit naturellement sur le corps $\mathcal{K}_{r,\tau}$ qui est, pour cette raison, muni d'une structure de corps différentiel. Soit \mathcal{K} l'union théorique des ensembles $\mathcal{K}_{r,\tau}$. En toute évidence, \mathcal{K} est un corps. Tout élément de ce corps est une fonction d'un nombre fini d'éléments de \mathcal{C} et, par conséquence, il peut être noté en général par

$$a(\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_\tau),$$

où

$$\mathbf{z}_i := \{z_{1,i}, \dots, z_{r,i}\}$$

pour des valeurs convenables de r et τ .

On considère maintenant l'ensemble infini de symboles

$$d\mathcal{C} = \{dz_{i,j}, i = 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots\}.$$

Soit \mathcal{E} l'espace vectoriel engendré sur \mathcal{K} par les éléments de $d\mathcal{C}$:

$$\mathcal{E} = \text{span}_{\mathcal{K}} d\mathcal{C}.$$

Tout élément appartenant à \mathcal{E} est un vecteur de la forme

$$v = \sum_{\substack{i \geq 1 \\ l \in \mathbb{N}}} F_{i,l} dz_{i,l}, \quad F_{i,l} \in \mathcal{K}$$

où seulement un nombre fini de coefficients $F_{i,l}$ sont différents de zéro. L'espace vectoriel \mathcal{E} peut être identifié au produit cartésien $\mathcal{K} \times \dots \times \mathcal{K}$, avec des vecteurs unitaires $dz_{i,j}$.

On définit un opérateur de \mathcal{K} vers \mathcal{E} , qui, avec un abus de notation sera noté par d , de la manière suivante :

$$d(F(\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_\tau)) = \sum_{\substack{i \leq r \\ l \leq \tau}} \frac{\partial F(\cdot)}{\partial z_{i,l}} dz_{i,l}.$$

Les éléments de \mathcal{E} seront appelés *1-formes*.

Considérons l'ensemble infini de symboles

$$\wedge d\mathcal{C} = \{dz_{i,l} \wedge dz_{i',l'}, \text{ pour } i, i' \geq 1, \quad l, l' \in \mathbb{N}\}$$

et l'espace vectoriel, qui sera représenté par $\wedge \mathcal{E}$, engendré sur \mathcal{K} par les éléments de $\wedge d\mathcal{C}$. Pour $\wedge \mathcal{E}$ on considère la relation d'équivalence R décrite par

$$d\alpha \wedge d\beta = -d\beta \wedge d\alpha.$$

L'espace vectoriel $\wedge \mathcal{E} \bmod R$ sera dénoté par $\mathcal{E}^{(2)}$ et ses éléments seront appelés *2-formes*.

On définit maintenant un opérateur de \mathcal{E} vers $\mathcal{E}^{(2)}$, qui, avec un nouvel abus de notation sera noté par d , de la façon suivante :

$$\begin{aligned} dv &= d\left(\sum_{\substack{i \geq 1 \\ l \in \mathbb{N}}} F_{i,l} dz_{i,l}\right) \\ &= \sum_{\substack{i \geq 1 \\ l \in \mathbb{N}}} d(F_{i,l}) \wedge dz_{i,l} \\ &= \sum_{\substack{i, i' \geq 1 \\ l, l' \in \mathbb{N}}} \frac{\partial F_{i,l}}{\partial z_{i',l'}} dz_{i',l'} \wedge dz_{i,l} \end{aligned}$$

On définit maintenant un opérateur, $\delta : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, comme suit :

$$\delta a(\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_s) := a(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{s+1}). \quad (1.3)$$

Cet opérateur a été utilisé pour définir un anneau de polynômes pour l'étude des systèmes à retards dans les cas linéaire [5, 11, 48, 53], et non linéaire [7, 42, 45]. Cependant, il faut prendre des précautions pour éviter certaines contradictions.

Par exemple, le membre de gauche de l'équation (1.3) peut être vu comme le produit d'un polynôme de degré 1 (δ) et un scalaire sur \mathcal{K} ($a(\cdot)$). Or, ceci donne un scalaire, au lieu d'un polynôme de degré 1. De plus, une extension de δ aux éléments de \mathcal{E} a été définie dans [35, 45] de sorte qu'elle commute avec l'opérateur d . Or, si l'on évalue

$$(\delta)(z_{1,0} dz_{1,0}),$$

cela donne

$$z_{1,1} \delta dz_{1,0} = z_{1,1} d\delta z_{1,0} = z_{1,1} dz_{1,1} \delta$$

ce qui n'est pas défini.

Pour contourner ces “paradoxes”, il est nécessaire d'introduire un anneau de polynômes d'un opérateur ∇ à coefficients sur \mathcal{K} , qui sera noté $\mathcal{K}[\nabla]$; tout élément de cet anneau se met sous la forme

$$a(\nabla) = \sum_{i=0}^{r_a} a_i \nabla^i, \quad a_i \in \mathcal{K}$$

où r_a est le degré polynômial de $a(\nabla)$. La somme et le produit sur cet anneau sont définis par

$$\begin{aligned} a(\nabla) + b(\nabla) &:= \sum_{i=0}^{\max(r_a, r_b)} (a_i + b_i) \nabla^i \\ a(\nabla)b(\nabla) &:= \sum_{i=0}^{r_a} \sum_{j=0}^{r_b} (a_i)(\delta^i b_j) \nabla^{i+j} \end{aligned}$$

Cet opérateur est maintenant lié à δ par la pseudo-commutation

$$\nabla d := d\delta,$$

ce qui lui permet d'agir d'une façon naturelle sur les éléments de \mathcal{E} : en utilisant cet opérateur dans l'exemple précédent, on obtient

$$\nabla x_{1,0} dx_{1,0} = x_{1,1} \nabla dx_{1,0} = x_{1,1} d\delta x_{1,0} = x_{1,1} dx_{1,1}$$

Bien qu'il ne soit pas commutatif, il a des propriétés intéressantes qui seront présentées dans la section suivante.

1.3.2 Quelques propriétés de base

En toute évidence, cet anneau est intègre. On va montrer maintenant que cet anneau possède un algorithme de division Euclidienne.

Théorème 3 (Algorithme de division à gauche) *Pour toute paire de polynômes $a(\nabla), b(\nabla) \in \mathcal{K}[\nabla]$, $b(\nabla) \neq 0$, il existe deux polynômes uniques $c(\nabla), r(\nabla) \in \mathcal{K}[\nabla]$, tels que*

$$a(\nabla) = c(\nabla)b(\nabla) + r(\nabla) \quad \text{avec} \quad \deg r(\nabla) < \deg b(\nabla) \quad (1.4)$$

Preuve. L'existence est donnée par l'Algorithme 1.

La preuve d'unicité est directe, par contradiction. ■

Algorithme 1 Division d'Euclide sur $\mathcal{K}[\nabla]$

Valeurs initiales :

$$\begin{aligned} c(\nabla) &\leftarrow 0 \\ r(\nabla) &\leftarrow a(\nabla) \end{aligned}$$

boucle

Soit $l = \deg r(\nabla) - \deg b(\nabla)$.

si $l < 0$ **alors**

fin de l'algorithme.

sinon

$$p(\nabla) \leftarrow \frac{\bar{r}}{\delta^l \bar{b}} \nabla^l$$

où les fonctions \bar{r} et \bar{b} sont, respectivement, les coefficients des monômes de plus haut degré de $r(\nabla)$ et $b(\nabla)$. A noter que $\delta^l \bar{b} \in \mathcal{K}$.

$$\begin{aligned} c(\nabla) &\leftarrow c(\nabla) + p(\nabla) \\ r(\nabla) &\leftarrow r(\nabla) - p(\nabla)b(\nabla) \end{aligned}$$

fin si

fin boucle

Remarque 4 Dans certains cas, il est possible de trouver des polynômes $c'(\nabla), r'(\nabla) \in \mathcal{K}[\nabla]$, tels que

$$\begin{aligned} a(\nabla) &= b(\nabla)c'(\nabla) + r'(\nabla) \\ \deg r'(\nabla) &< \deg b(\nabla) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Dans ce cas-là, on parle de division à droite. Un exemple est fourni par les polynômes appartenant à $\mathbb{R}[\nabla]$.

Considérons maintenant deux polynômes non nuls $a(\nabla), b(\nabla) \in \mathcal{K}[\nabla]$. En utilisant l'algorithme de division à gauche on obtient $c_1(\nabla), r_1(\nabla) \in \mathcal{K}[\nabla]$ tels que (1.4) soit satisfaite. Alors

$$\begin{bmatrix} 1 & -c_1(\nabla) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\nabla) \\ b(\nabla) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1(\nabla) \\ b(\nabla) \end{bmatrix}.$$

Divisons $b(\nabla)$ par $r_1(\nabla)$, ce qui donne

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c_2(\nabla) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(\nabla) \\ b(\nabla) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1(\nabla) \\ r_2(\nabla) \end{bmatrix},$$

où $\deg r_2(\nabla) < \deg r_1(\nabla)$. Si l'on continue cette procédure (au plus $\deg a(\nabla)$ fois), on obtient

$$\begin{bmatrix} P_1(\nabla) & Q_1(\nabla) \\ P_2(\nabla) & Q_2(\nabla) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\nabla) \\ b(\nabla) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(\nabla) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

où

- les matrices $\begin{bmatrix} 1 & -c_i(\nabla) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c_i(\nabla) & 1 \end{bmatrix}$ sont inversibles ;
- la première matrice du coté gauche de l'équation (1.6) est inversible, car elle est le produit de matrices inversibles,
- le polynôme $d(\nabla)$ est le p.g.c.d. à gauche de $a(\nabla)$ et $b(\nabla)$.

Ce résultat montre bien que l'algorithme d'Euclide peut être utilisé sur $\mathcal{K}[\nabla]$ (pour la division à gauche). Donc, $\mathcal{K}[\nabla]$ est un anneau euclidien non commutatif, ce qui implique à son tour que $\mathcal{K}[\nabla]$ est un anneau principal à gauche.

A partir de ce même résultat, on peut montrer aussi que l'anneau $\mathcal{K}[\nabla]$ est aussi un anneau d'Ore à gauche. Cette propriété à été prouvée avec des outils différents, dans [35].

Théorème 4 Pour tout $a(\nabla)$ et $b(\nabla) \in \mathcal{K}[\nabla]$, il existe deux polynômes non nuls $p(\nabla), q(\nabla)$ tels que

$$p(\nabla)a(\nabla) + q(\nabla)b(\nabla) = 0 \quad (1.7)$$

Preuve. Elle découle directement de (1.6), en posant $p(\nabla) = P_2(\nabla)$ et $q(\nabla) = Q_2(\nabla)$. Ces polynômes ne sont pas nuls, car ils forment une ligne d'une matrice inversible, mais ils ne sont pas uniques. ■

Théorème 5 Soit $a(\nabla), b(\nabla)$ deux éléments de $\mathcal{K}[\nabla]$ premiers entre eux à gauche. Alors, il existe des polynômes $p(\nabla), q(\nabla) \in \mathcal{K}[\nabla]$ tels que

$$p(\nabla)a(\nabla) + q(\nabla)b(\nabla) = 1.$$

Preuve. Ceci vient directement de (1.4), car $d(\nabla) = 1$. ■

Corollaire 1 Considérons $a(\nabla), b(\nabla)$ définis comme auparavant. Alors pour tout $f(\nabla) \in \mathcal{K}[\nabla]$, il existe des coefficients $\alpha(\nabla), \beta(\nabla) \in \mathcal{K}[\nabla]$ tels que

$$\alpha(\nabla)a(\nabla) + \beta(\nabla)b(\nabla) = f(\nabla).$$

Remarque 5 L'équivalent du Théorème 5 pour les polynômes premiers entre eux à droite n'est valable que dans des cas particuliers. Par exemple, si l'on divise à droite $z_{1,0}\nabla$ par $z_{2,0}\nabla$ on arrive à

$$z_{1,0}\nabla = z_{2,0}\nabla \frac{z_{1,-1}}{z_{2,-1}}.$$

Le terme $z_{1,-1}/z_{2,-1}$ n'appartenant pas à $\mathcal{K}[\nabla]$, ces polynômes sont premiers entre eux à droite (sur $\mathcal{K}[\nabla]$). Cependant il n'existe pas de polynômes $p(\nabla), q(\nabla) \in \mathcal{K}[\nabla]$ satisfaisant

$$z_{1,0}\nabla p(\nabla) + z_{2,0}\nabla q(\nabla) = 1.$$

1.3.3 Matrices à éléments dans $\mathcal{K}[\nabla]$

Dans l'application de notre approche, on sera souvent confronté à manipuler des matrices dont les éléments appartiennent à $\mathcal{K}[\nabla]$. Cela nous impose à bien établir certaines définitions pour de telles matrices.

Définition 20 Le rang par lignes (resp. par colonnes) sur l'anneau $\mathcal{K}[\nabla]$ d'une matrice A est le nombre maximal de lignes (resp. colonnes) linéairement indépendantes à gauche (resp. à droite) sur cet anneau.

Remarque 6 Le rang par lignes est égal au rang par colonnes sur des anneaux commutatifs. Ceci n'est plus le cas pour le cas non commutatif. Prenons par exemple la matrice

$$\begin{bmatrix} z_{1,0}\nabla & \nabla \\ z_{1,0}^2\nabla & z_{1,0}\nabla \end{bmatrix},$$

pour laquelle le rang par colonnes est 2, mais le rang par lignes est 1.

Une autre notion importante est celle de matrice unimodulaire. Les matrices unimodulaires sont souvent définies comme étant celles dont le déterminant est un scalaire. Cependant, la notion de déterminant n'existe pas pour les matrices à éléments dans $\mathcal{K}[\nabla]$. Pour montrer les difficultés pour établir une définition pratique, considérons la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{1,0} + z_{1,1}\nabla & z_{2,0} + z_{2,1}\nabla - z_{1,1}\nabla \\ z_{1,1}\nabla & z_{2,1}\nabla + z_{1,0} - z_{1,1}\nabla \end{bmatrix}.$$

Bien que cette matrice ait un inverse polynômial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z_{1,0}^2} \begin{bmatrix} z_{1,0} + (z_{2,0} - z_{1,0})\nabla & -z_{2,0} - (z_{2,0} - z_{1,0})\nabla \\ -z_{1,0}\nabla & z_{1,0}(1 + \nabla) \end{bmatrix},$$

le lecteur se convaincra qu'il n'existe pas d'expression unique privilégiée pour une éventuelle notion de déterminant.

C'est pour cette raison que les matrices unimodulaires seront définies de la manière suivante.

Définition 21 (Matrice unimodulaire) *Une matrice à éléments dans un l'anneau de polynômes $\mathcal{K}[\nabla]$ est unimodulaire si elle admet un inverse à éléments dans le même anneau.*

L'avantage d'une telle définition est que, si la matrice inverse existe, elle peut être trouvée à l'aide de l'Algorithme 2.

Considérons maintenant les trois opérations élémentaires suivantes, sur les lignes ou les colonnes d'une matrice :

1. permutation de deux lignes ou deux colonnes ;
2. somme d'un multiple d'une ligne ou colonne, à une autre ;
3. multiplication d'une ligne ou une colonne par un élément non nul.

Toute matrice $\mathbf{A} \in R^{m \times p}$, de rang r , définie sur un anneau commutatif R , peut être ramenée, à l'aide de ces trois opérations élémentaires, à la "forme diagonale" équivalente, $Smith(\mathbf{A})$ appelée forme de Smith associée à \mathbf{A} , suivante (voir, par exemple, [34, 63]) :

$$Smith(\mathbf{A}) = \begin{cases} [\Delta & \mathbf{0}], & si \quad p < m \\ \Delta, & si \quad p = m \\ \begin{bmatrix} \Delta \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, & si \quad p > m \end{cases} \quad \text{avec} \quad \Delta = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & p_r & \\ & & & 0 \\ (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Algorithme 2 Inversion d'une matrice à éléments dans $\mathcal{K}[\nabla]$

Soit $\mathcal{A} = [A \mid \mathbb{I}]$

pour $i = 1$ jusqu'à n **faire**

si $[a_{ii} \cdots a_{ni}] = \mathbf{0}$ **alors**

 le problème n'a pas de solution. Fin de l'algorithme.

sinon

 Permuter les lignes de \mathcal{A} de sorte que $\deg a_{ii} \leq \min\{\deg a_{ji}, \ j > i, a_{ji} \neq 0\}$

tant que $\exists j > i$ tel que $a_{ji} \neq 0$ **faire**

 Permuter les lignes $i + 1$ et j de \mathcal{A}

 Trouver $P, Q, R, S \in \mathcal{K}[\nabla] \setminus \{0\}$ tels que

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ii} \\ a_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d[\nabla] \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A} \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{i-1} & & (0) \\ & P & Q \\ & R & S \\ (0) & & \mathbb{I}_{n-i-1} \end{bmatrix} \mathcal{A}$$

fin tant que

si $a_{ii} \notin \mathcal{K}$ **alors**

 le problème n'a pas de solution. Fin de l'algorithme.

sinon

 Diviser (à gauche) la ligne i de \mathcal{A} par a_{ii} .

$$\mathcal{A} \leftarrow \left[\begin{array}{cc|c} & -a_{1i} & (0) \\ \mathbb{I}_{i-1} & \vdots & \\ & -a_{i-1,i} & \\ \hline & 1 & (0) \\ (0) & & \mathbb{I}_{n-i-1} \end{array} \right] \mathcal{A}$$

fin si

fin si

fin pour

Après n étapes, on obtient $\mathcal{A} = [\mathbb{I} \mid A^{-1}]$, où A^{-1} est la matrice inverse de A .

où p_i divise p_{i+1} , $i = 1 \dots r - 1$. Les polynômes p_i sont appelés les *polynômes invariants* de \mathbf{A} .

1.4 Systèmes à retards modélisés sur $\mathcal{K}[\nabla]$

Considérons le système à retards Σ modélisé par (1.1).

Par simplicité de notation, on utilisera les symboles suivants :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i &:= \{x_1(t-i), \dots, x_n(t-i)\} \\ \mathbf{u}_i &:= \{u_1(t-i), \dots, u_m(t-i)\} \\ \mathbf{x} &:= \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_\tau\} \\ \mathbf{u} &:= \{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_\tau\}\end{aligned}$$

L'état $x(t) := \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, l'entrée de commande $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_m(t)\}$ avec ses dérivées par rapport au temps $u^k(t)$, ainsi que leurs valeurs passées sont associés aux éléments de \mathcal{C} :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i &:= \{z_{1,i}, \dots, z_{n,i}\} \\ \mathbf{u}_i^{(k)} &:= \{z_{n+1+km,i}, \dots, z_{n+(1+k)m,i}\}\end{aligned}$$

\mathcal{E} est alors l'espace vectoriel engendré sur \mathcal{K} , et noté

$$\mathcal{E} = \text{span}_{\mathcal{K}} \{d\xi, \quad \xi \in \mathcal{K}\}$$

Soit \mathcal{M} le module à gauche sur l'anneau $\mathcal{K}[\nabla]$:

$$\mathcal{M} = \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{d\xi \mid \xi \in \mathcal{K}\}.$$

Pour un ensemble donné de vecteurs $\{\omega_1, \dots, \omega_s\}$ sur \mathcal{E} , $\text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\omega_1, \dots, \omega_s\}$ représente le sous-module de \mathcal{M} engendré par $\{\omega_1, \dots, \omega_s\}$.

L'introduction de ce module nous permet à présent d'écrire la différentielle de toute fonction $\varphi(\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_k)$ comme suit :

$$d\varphi(\mathbf{z}) = \left[\sum_{i=0}^k \frac{\partial \varphi(\cdot)}{\partial \mathbf{z}_i} \nabla^i \right] d\mathbf{z}_0$$

Remarque 7 *Tout élément de \mathcal{M} appartient aussi à \mathcal{E} et vice-versa. Même si \mathcal{E} et \mathcal{M} sont égaux en tant qu'ensembles, ils ont une structure algébrique*

différente. Considérons par exemple deux vecteurs $\omega_1 := dz_{1,0}$ et $\omega_2 := z_{1,0}dz_{1,1}$. Alors

$$\dim_{\mathcal{K}}\{\text{span}_{\mathcal{K}}\{\omega_1, \omega_2\}\} = 2$$

tandis que

$$\dim_{\mathcal{K}[\nabla]}\{\text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]}\{\omega_1, \omega_2\}\} = 1 \quad (\text{car } \omega_2 = z_{1,0}\nabla\omega_1)$$

A présent, on peut modéliser les systèmes à retards définis par (1.1) comme un sous-module de \mathcal{M} , en prenant la différentielle de \dot{x}_0 :

$$\begin{aligned} d\dot{\mathbf{x}}_0 &= F[\nabla]d\mathbf{x}_0 + g[\nabla]d\mathbf{u}_0 \\ d\mathbf{y}_0 &= H[\nabla]d\mathbf{x}_0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

où les éléments de $F[\nabla]$, $g[\nabla]$ et $H[\nabla]$ appartiennent à $\mathcal{K}[\nabla]$. Le système (1.8) est aussi appelé le système linéarisé tangent.

1.5 Définitions supplémentaires

1.5.1 Fermeture d'un sous-module

La notion de fermeture sur $\mathcal{R}[\nabla]$, introduite en automatique par Conte et Perdon pour l'étude des systèmes linéaires à retards [11], a prouvé être un outil puissant pour l'étude des systèmes à retards.

Une définition générale est maintenant rappelée.

Définition 22 ([5] Fermeture d'un sous-module) Soit \mathcal{M} un module sur un anneau intègre R et S l'ensemble multiplicatif des éléments non nuls de R . La fermeture d'un sous-module \mathcal{N} de \mathcal{M} est l'ensemble $\bar{\mathcal{N}}$:

$$\text{cls}_R \mathcal{N} = \bar{\mathcal{N}} = \{x \in \mathcal{M} \text{ tel que } \exists s \in S; sx \in \mathcal{N}\}$$

Si \mathcal{N} et $\bar{\mathcal{N}}$ coïncident, on dira que \mathcal{N} est fermé.

Dans le but d'éviter des notations trop lourdes, on notera la fermeture d'un module sur un anneau R engendré par un nombre fini de vecteurs $\{v_1, \dots, v_s\}$ par

$$\text{cls}_R\{v_1, \dots, v_s\} \triangleq \text{cls}_R\{\text{span}_R\{v_1, \dots, v_s\}\}.$$

Exemple 1 Soit $\mathcal{A} = \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\omega\}$. Pour trouver sa fermeture on écrit d'abord

$$\omega = [p_1 \quad \cdots \quad p_k] \begin{bmatrix} dz_{1,0} \\ \vdots \\ dz_{k,0} \end{bmatrix}$$

Soit \bar{p} le p.g.c.d. (à droite) sur $\mathcal{K}[\nabla]$ des tous les coefficients p_i ; alors

$$\omega = \bar{p} \sum_{i=1}^k p'_i dz_{i,0}$$

$\omega' = \sum_{i=1}^k p'_i dz_{i,0}$ est une base de $\text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \mathcal{A}$.

L'exemple suivant montre que la somme de deux fermés n'est pas forcément fermée.

Exemple 2 Considérons les vecteurs $\omega_1 = dz_{1,0} + dz_{2,1}$ et $\omega_2 = dz_{1,0} + dz_{3,1}$. En suivant l'exemple précédent, on peut montrer que les sous-modules $\text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\omega_1\}$ et $\text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\omega_2\}$ sont fermés sur $\mathcal{K}[\nabla]$. Pourtant, $\text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\omega_1, \omega_2\}$ ne l'est pas, car :

$$dz_{2,0} - dz_{3,0} \notin \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\omega_1, \omega_2\}$$

mais

$$\nabla(dz_{2,0} - dz_{3,0}) = \omega_1 - \omega_2.$$

Une base de $\text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\omega_1, \omega_2\}$ est $\{\omega_1, dz_{2,0} - dz_{3,0}\}$.

1.5.2 Transformations de systèmes

La solution de beaucoup de problèmes demande de modifier la dynamique du système et/ou la représentation de l'espace d'état. La dynamique est modifiée en utilisant des compensateurs, et les différentes représentations de l'espace d'état sont obtenues à travers de changements de coordonnées. Ces transformations sont bien définies et classées dans la littérature de la commande standard. Cependant, ceci n'est plus le cas pour les systèmes à retards.

Changement de coordonnées

La définition standard de changement de coordonnées demande que les coordonnées d'état \mathbf{x}_0 soient associées (au moins dans un voisinage d'un point

donné x_0) aux nouvelles coordonnées ξ_0 , par un difféomorphisme $\varphi(\mathbf{x})$. Cette condition peut être testée au moyen d'une condition de rang sur $(\partial/\partial x)\varphi(\mathbf{x})$.

Pour les systèmes sans retard, cette condition n'est plus suffisante. Pour le prouver, considérons d'abord la relation $\xi_{1,0} = \varphi_1(\mathbf{x}) = x_{1,0} + x_{1,1}$, d'où

$$d\xi_{1,0} = Tdx_{1,0} = [1 + \delta]dx_{1,0}.$$

Bien que la matrice T soit de rang plein, $\varphi_1(\mathbf{x})$ n'est pas un difféomorphisme : il existe une infinité de fonctions $x = \phi(t)$ qui sont associées à $\xi_{1,0} = 0$. Trois exemples sont 0, $\sin(\pi t)$ et $\text{sgn}(\sin(\pi t))$ (voir fig. 1.1). La seule façon de les distinguer à partir d'un instant t_0 est de connaître les valeurs de $x(t)$ dans tout l'intervalle $[t_0 - 1, t_0]$.

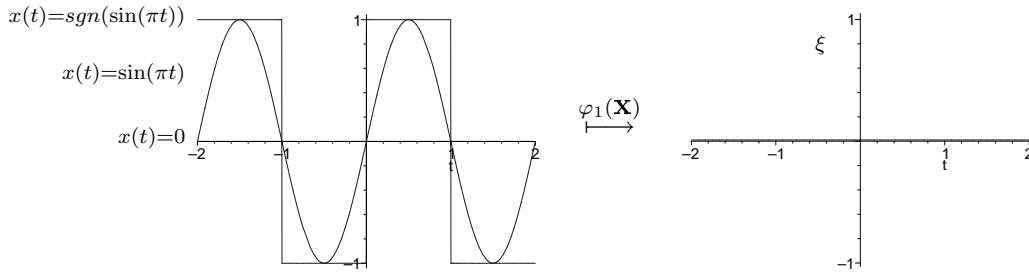


FIG. 1.1 – $\varphi_1 = x_{1,0} + x_{1,1}$, évalué pour trois trajectoires différentes

Considérons maintenant la relation $d\xi_{1,0} = Td\varphi_2(\mathbf{x}) = x_{1,1}$. La matrice T est à nouveau de rang plein. Cette fois-ci, on a une relation biunivoque entre les valeurs de ξ_0 et \mathbf{x} . φ_2 est une transformation *causale*, mais son inverse ne l'est pas : $x_{1,0}$ ne peut pas être exprimé comme une fonction causale de ξ .

Finalement, considérons la transformation causale décrite par

$$\begin{aligned} z_{1,0} &= x_{1,0} + x_{2,1}^2 \\ z_{2,0} &= x_{2,0} \end{aligned}$$

Cette transformation est appelée *bicausale*, car elle admet un inverse causal :

$$\begin{aligned} x_{1,0} &= z_{1,0} - z_{2,1}^2 \\ x_{2,0} &= z_{2,0} \end{aligned}$$

Dans ce travail, on s'est intéressé particulièrement aux changements de coordonnées bicausaux. D'une part, parce que cette condition empêche d'avoir des restrictions fictives pour la recherche des solutions causales aux problèmes de la commande. D'autre part, ceci évite de trouver des solutions causales après transformation, qui deviennent non causales dans les coordonnées d'origine.

La notion de changement de coordonnées est définie par la suite.

Définition 23 [*Changement de coordonnées*] Considérons le système Σ , avec des coordonnées locales d'état \mathbf{x}_0 . Alors

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \Psi(\mathbf{x})$$

est un changement de coordonnées d'état pour le système s'il existe une fonction Ψ^{-1} et des constantes $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathbb{N}$ telles que (localement)

$$\text{diag}\{\delta^{\tau_i}\} \mathbf{x}_0 = \Psi^{-1}(\boldsymbol{\xi}).$$

$\boldsymbol{\xi}_0$ est un changement de coordonnées bicausal si $\max\{\tau_i\} = 0$, c.-à-d., si $\mathbf{x}_0 = \Psi^{-1}(\boldsymbol{\xi})$.

Proposition 2 Soit \mathcal{A} un sous-module de \mathcal{M} donné par

$$\mathcal{A} = \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\omega_1, \dots, \omega_s\}$$

avec $\{\omega_1, \dots, \omega_s\}$ linéairement indépendants. Alors, pour tout ensemble de vecteurs $\{\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_s\}$

$$\mathcal{A} = \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_s\}$$

si, et seulement si, il existe une matrice unimodulaire $T[\nabla] \in \mathcal{K}^{s \times s}[\nabla]$ telle que

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_s \end{bmatrix} = T[\nabla] \begin{bmatrix} \bar{\omega}_1 \\ \vdots \\ \bar{\omega}_s \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Preuve. Puisque $\text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\omega_1, \dots, \omega_s\} \subset \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_s\}$, il existe une matrice $T[\nabla]$ satisfaisant (1.9). Aussi, $\text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_s\} \subset \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\omega_1, \dots, \omega_s\}$, ce qui implique l'existence d'une autre matrice polynômial $T'[\nabla]$ satisfaisant

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_1 \\ \vdots \\ \bar{\omega}_s \end{bmatrix} = T'[\nabla] \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_s \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

A partir de (1.9) et (1.10) on a

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_s \end{bmatrix} = T[\nabla] \begin{bmatrix} \bar{\omega}_1 \\ \vdots \\ \bar{\omega}_s \end{bmatrix} = TT' \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_s \end{bmatrix}$$

L'indépendance linéaire des vecteurs ω_i implique que $TT' = \mathbb{I}$, ce qui complète la preuve. ■

Proposition 3 – Soient $\xi_0 = \varphi(\mathbf{x})$ une transformation et $T \in \mathcal{K}^{n \times n}[\nabla]$ la matrice définie par

$$d\xi_0 = T d\mathbf{x}_0$$

Si ξ_0 est un changement de coordonnées causal pour le système Σ , alors T peut être décomposée sous la forme

$$T = T_1 T_2$$

où la matrice $T_1 \in \mathcal{K}^{n \times n}[\nabla]$ est unimodulaire et $T_2 = \text{diag}\{\nabla^{\tau_i}\}$; en d'autres termes

$$\text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{d\xi_{1,0}, \dots, d\xi_{n,0}\} = \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{dx_{1,\tau_1}, \dots, dx_{n,\tau_n}\}$$

– Si $\xi_0 = \varphi(\mathbf{x})$ est un changement de coordonnées bicausal alors $T_2 = \mathbb{I}$, et

$$\text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{d\xi_{1,0}, \dots, d\xi_{n,0}\} = \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{dx_{1,0}, \dots, dx_{n,0}\}.$$

La preuve est assez directe, à partir de la Définition 23 et la Proposition 2.

Compensateurs causaux pour les systèmes à retards

Un seul opérateur agit sur les systèmes sans retard : la dérivation par rapport au temps. La terminologie standard considère les compensateurs statiques comme un cas particulier de la classe générale des compensateurs dynamiques. Les systèmes à retards sont décrits par des équations différentielles et aux différences, et sont sujets à deux opérateurs : la différentiation par rapport au temps et à l'opérateur de décalage de temps.

Les compensateurs généraux pour les systèmes à retards se divisent alors en plusieurs classes en fonction de leur dynamique par rapport à chaque opérateur. Une classification très générale est montrée dans le Tableau 1.1.

		Dynamique par rapport à $\frac{d}{dt}$?	
		non	oui
Dynamique par rapport à δ ?	non	statique sans mémoire	dynamique sans mémoire
	oui	statique avec retards	dynamique avec retards

TAB. 1.1 – Compensateurs causaux par rapport à leur dynamique

Dans ce tableau, les compensateurs sur la première ligne correspondent aux compensateurs statique et dynamique standard pour les systèmes sans retard.

La deuxième ligne montre deux classes générales de compensateurs avec une dynamique propre par rapport à δ .

Afin d'introduire ces nouvelles classes de compensateurs, supposons que lors de la résolution d'un problème de commande, on soit amené à résoudre en $u(t)$ l'équation

$$u(t) + x(t)u(t-2) = f(x(t), x(t-1), \dots, x(t-\tau)) + v(t) + v(t-1),$$

ce qui nous conduit à une relation implicite en u :

$$u(t) = f(x(t), x(t-1), \dots, x(t-\tau)) + v(t) - x(t)u(t-1).$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} u(t) &= f(\mathbf{x}) + v(t) + v(t-1) - x(t)\zeta(t) \\ \zeta(t+2) &= f(\mathbf{x}) + v(t) + v(t-1) - x(t)\zeta(t). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ce compensateur appartient à la classe de compensateurs appelée *statique avec retards*, et décrite par

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \zeta(t + \tau_z) = M(\mathbf{x}, \zeta) + \sum_{i=0}^{m'} N_i(\mathbf{x}, \zeta) \mathbf{v}_i, \\ \mathbf{u}_0 = \alpha(\mathbf{x}, \zeta) + \sum_{i=0}^{m'} \beta_i(\mathbf{x}, \zeta) \mathbf{v}_i. \end{cases} \quad (1.12)$$

La classe la plus générale de compensateurs à avoir été considérée dans ce travail sont les compensateurs dynamiques avec retards. Ceux-ci sont définis par

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 = M(\mathbf{x}, \zeta, \boldsymbol{\eta}) + \sum_{i=0}^{m'} N_i(\mathbf{x}, \zeta, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{v}_i \\ \zeta(t + \tau_z) = \psi(\mathbf{x}, \zeta, \boldsymbol{\eta}) + \sum_{i=0}^{m'} \ell_i(\mathbf{x}, \zeta, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{v}_i \\ \mathbf{u}_0 = \alpha(\mathbf{x}, \zeta, \boldsymbol{\eta}) + \sum_{i=0}^{m'} \beta_i(\mathbf{x}, \zeta, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{v}_i \end{cases} \quad (1.13)$$

Reprenons maintenant l'équation (1.11) ; on la réécrit d'une façon plus compacte :

$$(1 - x_0\delta)u_0 = f(\mathbf{x}) + (1 + \delta)v_0.$$

C'est en utilisant cette notation que plusieurs sous-classes de compensateurs sont présentées dans la Table 1.2. Ces compensateurs seront utilisés dans les sections suivantes pour traiter divers problèmes de commande.

Retour statique sans mémoire
$\mathbf{u}_0 = \alpha(\mathbf{x}_0) + \beta(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}_0, \quad \beta(\mathbf{x}_0) \text{ inversible}$
Retour statique avec retards
$P[\mathbf{x}, \delta]\mathbf{u}_0 = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})\mathbf{v}_0, \quad \beta(\mathbf{x}) \text{ inversible, } \text{rang}_{\mathcal{K}[\nabla]}P[\mathbf{x}, 0] = m$
Compensateur bicausal
$P[\mathbf{x}, \delta]\mathbf{u}_0 = \alpha(\mathbf{x}) + Q[\mathbf{x}, \delta]\mathbf{v}_0, \quad \text{rang}_{\mathcal{K}[\nabla]}P[\mathbf{x}, 0] = \text{rang}_{\mathcal{K}[\nabla]}Q[\mathbf{x}, 0] = m$
Compensateur dynamique avec retards
$\begin{aligned} P[\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, \delta]\mathbf{u}_0 &= \alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) + Q[\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, \delta]\mathbf{v}_0 \\ R[\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, \delta]\dot{\boldsymbol{\eta}}_0 &= M(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) + N[\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, \delta]\mathbf{v}_0 \end{aligned} \quad \text{rang}_{\mathcal{K}[\nabla]}P[\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, 0] = m$

TAB. 1.2 – Compensateurs non linéaires causaux

1.5.3 Formes exactes, intégrabilité

La définition du module \mathcal{M} donne lieu à des nouvelles relations entre les éléments de \mathcal{E} . Ainsi, des 1-formes indépendantes sur \mathcal{K} deviennent colinéaires sur $\mathcal{K}[\nabla]$. Certains concepts comme “forme exacte” et “forme intégrable” dépendent de ces notions d’indépendance, ce qui nous oblige à définir ce que l’on va appeler une forme exacte, une forme intégrable, et leur caractérisation.

Pour commencer, on emprunte une terminologie usuelle au cas sans retard :

- une 1-forme $v \in \mathcal{E}$ est dite fermée si $dv = 0$;
- la différentielle d’une fonction est appelée une 1-forme exacte ;
- toute 1-forme exacte est fermée ;
- toute 1-forme fermée est localement exacte (Lemme de Poincaré).

L’exemple typique de la forme fermée qui n’est pas exacte est le suivant.

Exemple 3 [10] Dans \mathbb{R}^2 , on considère la 1-forme fermée

$$\omega = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2.$$

Localement, autour de tout point (x_1, x_2) tel que $x_2 \neq 0$, $\omega = d[\arctan(x_1/x_2)]$, et autour de tout point (x_1, x_2) tel que $x_2 = 0$ et $x_1 \neq 0$, $\omega = d[\arctan(-x_2/x_1)]$. Cependant, il n’existe aucune fonction φ telle que $\omega = d\varphi$ globalement sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Une condition plus faible que d'être exacte, est d'être *intégrable*. Une 1-forme v est dite intégrable si

$$\text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{v\} = \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{d\varphi\}.$$

On présente maintenant une généralisation de cette propriété.

Définition 24 *Un sous-module $V \subset \mathcal{M}$ de rang s est dit intégrable s'il existe s fonctions φ_i telles que :*

$$V = \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{d\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$$

Dans le cas de systèmes sans retard, cette propriété est caractérisée par le théorème de Frobenius, que l'on rappelle maintenant.

Théorème 6 (Frobenius) [8] *Soit $\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ une base d'un sous-espace V de \mathcal{E} . V est fermé si et seulement si $d\omega_i \wedge \omega_r \wedge \dots \wedge \omega_1 = 0, \forall i = 1, \dots, r$.*

Ce théorème n'est plus valable pour les systèmes à retards, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4 *Soit les vecteurs $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}$ définis par*

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dz_{1,0} + z_{3,0}dz_{2,1} \\ \omega_2 &= dz_{2,0} \end{aligned}$$

une base d'un sous module V de \mathcal{M} . La condition de Frobenius n'est pas satisfaite :

$$d\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = dz_{3,0} \wedge dz_{2,1} \wedge dz_{1,0} \wedge dz_{2,0} \neq 0$$

cependant, $\{dz_{1,0}, dz_{2,0}\}$ est un changement de base pour V :

$$\begin{bmatrix} dz_{1,0} \\ dz_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -z_{3,0}\nabla \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix},$$

et donc V est fermé.

La généralisation au cas des systèmes à retards n'est disponible que pour le cas de sous-modules engendrés par une seule 1-forme.

Théorème 7 *Etant donné $v \in \mathcal{E}$, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{K}$ et un coefficient $\lambda \in \mathcal{K}[\nabla]$ tels que $v = \lambda d\varphi$ si et seulement si $d\bar{v} \wedge \bar{v} = 0$, où \bar{v} est une base de $\text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{v\}$.*

Preuve. Voir Annexe A. ■

1.6 Contributions par rapport à d'autres travaux

Dans ce chapitre on a présenté des définitions et des outils mathématiques qui seront utilisés pour étudier une classe de systèmes non linéaires à retards.

Cette classe de systèmes a été restreinte au cas de retards ponctuels, constants et commensurables. Dans le cas de systèmes linéaires, cela se réduit aux systèmes pouvant être modélisés sur un anneau principal. Ce choix est plus restrictif par rapport à d'autres travaux dans le cas linéaire, où des modèles plus généraux ont été traités (par exemple systèmes sur anneaux noëtheriens [5] ou systèmes bidimensionnels [52]). Il reste aussi général, voire plus général, que bon nombre de contributions pour les systèmes à retards linéaires et non linéaires [21, 43, 48, 53]. Cette restriction a permis de définir un anneau $\mathcal{K}[\nabla]$ avec des propriétés importantes, qui facilitent la mise en œuvre effective des algorithmes qui seront proposés dans ce rapport.

L'idée d'utiliser un opérateur retard pour traiter les systèmes à retards en tant que des systèmes sur un anneau remonte aux travaux de Tzafestas et Paraskevopoulos [59], Kamen [28], et Morse [43].

Des anneaux non commutatifs ont déjà été utilisés dans l'automatique pour étudier d'autres classes de systèmes, comme par exemple les systèmes linéaires (en temps continu et discret) variant dans le temps [27, 26]. Cependant, aucun de ces anneaux a les propriétés adéquates pour l'étude des systèmes non linéaires à retards.

La notion de changement de coordonnées a été utilisée dans le cas linéaire depuis relativement longtemps [30], mais seulement très récemment dans le cas non linéaire par des travaux indépendants [21, 38].

Le classement de compensateurs a été rapporté pour la première fois dans [42]. Dans leur forme la plus générale, ils peuvent être considérés comme appartenant à une généralisation du modèle de Roesser (voir par exemple [52]) pour les systèmes non linéaires à retards. Cette généralisation combine des dynamiques en temps continu et discret, et une application aux systèmes hybrides peut être envisagée.

La classe de compensateurs statique sans mémoire a été déjà considérée dans le cas des systèmes linéaires avec retards [46]; la classe de compensateurs statiques avec retards peut être considérée comme une généralisation de celles utilisées pour étudier le rejet de perturbations dans [12] (pour le cas linéaire statique) et [21] (cas non linéaire).

1.7 Conclusions

Dans ce Chapitre on a introduit des nouveaux outils mathématiques pour l'étude d'une classe très large de systèmes non linéaires à retards.

La spécificité remarquable de cette approche conduit à la définition et l'utilisation de modules sur un anneau qui, à différence de sa contrepartie linéaires, n'est pas commutatif, ce qui est non usuel dans la théorie des systèmes.

Dans le reste de ce mémoire, on montre comment ce formalisme peut être utilisé de manière effective pour traiter divers problèmes de l'analyse et la commande de systèmes non linéaires à retards.

Chapitre 2

Propriétés structurelles des SAR

L'étude de la structure de systèmes (linéaires et non linéaires), aussi appelée approche structurelle de la commande, a permis de résoudre des problèmes importants comme, par exemple, les problèmes de rejet de perturbation, de découplage, ou de poursuite de modèle. Elle a fait l'objet de nombreuses contributions dans le cas de systèmes sans retard. Des extensions sont disponibles pour les systèmes linéaires à retards [33].

Dans ce chapitre, on présentera quelques résultats sur deux sujets associés aux propriétés structurelles des systèmes à retards : l'accessibilité et la recherche de systèmes inverses.

2.1 Accessibilité

2.1.1 Définition

Quelle que soit la classe de systèmes, il est raisonnable d'analyser la commandabilité avant de chercher à résoudre un problème de commande quelconque. Un sujet de recherche très important, depuis le début de l'approche géométrique différentielle de la commande, a été l'extension de la notion de commandabilité pour les systèmes non linéaires. Cette notion, qui est un outil puissant dans la théorie linéaire, implique l'existence d'une entrée de commande $u(t)$ qui conduit le système d'un état initial x_{ini} vers un état final x_{fin} dans un temps fini. Cependant, on a vite réalisé que ceci était une condition très forte pour la classe générale de systèmes sans retard, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 5 *Considérons le système*

$$\dot{x}(t) = x(t)u(t);$$

- *il n'est pas commandable dans $x_{ini} = 0$ car on ne peut atteindre aucun autre point ;*
- *il est “localement commandable” ailleurs : à partir de tout point $x_{ini} \neq 0$ il existe un voisinage ouvert V de points atteignables :*

$$V = \{x_f \in \mathbb{R} \mid x_{ini}x_f > 0\}$$

De plus, une caractérisation pratique de cette propriété s'avère difficile. Tout ceci a conduit à la définition d'une notion plus faible : l'*accessibilité* [23, 58]. Il existe dans la littérature classique un critère bien défini pour l'accessibilité des systèmes non linéaires sans retard [3, 4, 15, 23, 58].

D'une façon générale, l'accessibilité est associée à la possibilité de modifier toute dynamique d'un système. Cette notion a été définie dans des termes d'existence ou non de *fonctions autonomes*.

Définition 25 (Elément autonome) *Une 1-forme non nulle ω est un élément autonome du système Σ , s'il existe un entier ν , et des coefficients non tous nuls $a_i \in \mathcal{K}[\nabla]$, tels que*

$$\alpha_0\omega + \dots + \alpha_\nu\omega^{(\nu)} = 0$$

Définition 26 *Une fonction $\varphi \in \mathcal{K}$ est autonome si $d\varphi$ est un élément autonome de Σ .*

D'un point de vue pratique, une fonction autonome est un état non commandable du système ; cette notion a été introduite pour la première fois dans [50] pour une classe étendue de systèmes à paramètres distribués.

Dans le cas de systèmes sans retard, un système Σ est accessible si une de ces deux conditions équivalentes est satisfaite :

- a) *il n'existe aucune fonction autonome pour le système Σ , ou*
- b) *il n'existe aucun élément autonome pour le système Σ .*

Pour les systèmes linéaires à retards, ces notions sont équivalentes à dire que le système est *sans torsion* sur l'anneau $\mathcal{K}[\nabla, \frac{d}{dt}]$; dans notre cas, leur équivalence demeure un problème ouvert.

L'accessibilité d'un système non linéaire à retards est définie formellement comme suit.

Définition 27 *Le système Σ est dit accessible s'il n'existe pas de fonction autonome.*

2.1.2 Filtration de \mathcal{M}

La filtration $\mathcal{M} \supset \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{H}_\infty$ a été introduite dans le cadre des systèmes non linéaires sans retard en temps discret [3] et continu [4]. Elle permet, parmi d'autres applications, de tester avec un nombre réduit de calculs l'accessibilité d'un système donné.

Cette filtration est associée à la notion de *degré relatif* des 1-formes.

Définition 28 Soit $\mathcal{X} = \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{d\mathbf{x}\}$. Le degré relatif $r(\omega)$ d'une 1-forme $\omega \in \mathcal{X}$ est défini comme suit :

$$r(\omega) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid \omega^{(k)} \notin \mathcal{X}\}.$$

Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\omega^{(k)} \in \mathcal{X}$, on pose $r(\omega) = \infty$.

Cette filtration $\mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{H}_k \supset \cdots$ peut être généralisée au cas des systèmes non linéaires à retards [35] :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &:= \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{dx, du\} \\ \mathcal{H}_{j+1} &:= \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\omega \in \mathcal{H}_j \mid \dot{\omega} \in \mathcal{H}_j\}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Cette filtration classe les 1-formes ω selon leur degré relatif $r(\omega)$, car $\forall j \geq 1$

$$\mathcal{H}_j := \{\omega \in \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{dx\} \mid r(\omega) \geq j\}.$$

2.1.3 Contribution

Dans le calcul pratique de la filtration \mathcal{H}_k , pour les systèmes à retards on trouve une difficulté majeure : ces derniers sont, en général, engendrés par un nombre infini de générateurs, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 6 Soit le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,0} &= x_{1,0}u_{1,0} + u_{1,2} \\ \dot{x}_{2,0} &= u_{1,0} + u_{1,1} \\ \dot{x}_{3,0} &= u_{1,1} - u_{1,2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dans le calcul de \mathcal{H}_2 , on trouve une infinité de triplets de polynômes $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ satisfaisant

$$\alpha_i(x_{1,0}u_{1,0} + u_{1,2}) + \beta_i(u_{1,0} + u_{1,1}) + \gamma_i(u_{1,1} - u_{1,2}) = 0$$

sans que l'on trouve un nombre fini de vecteurs qui engendrent tous les autres.

On va présenter maintenant une forme alternative pour le calcul de cette filtration.

Lemme 1 *Pour tout $k > 1$, le sous-module \mathcal{H}_k est l'annulateur à gauche de la matrice*

$$[g_1, \dots, g_{k-1}],$$

où

$$\begin{aligned} g_1 &= g[\nabla] \\ g_{i+1} &= F[\nabla]g_i - \dot{g}_i, \end{aligned}$$

avec $F[\nabla]$ et $g[\nabla]$ définies par (1.8).

La preuve se trouve dans l'Annexe C. Dans ce même Annexe, on montre que, pour toute 1-forme avec un degré relatif fini, ce dernier n'est jamais supérieur à n . En d'autres termes, $\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{H}_\infty$.

Lemme 2 *Soit $\omega \in \mathcal{X}$ une 1-forme avec degré relatif $r(\omega)$. Si $r(\omega) > n$, alors $r(\omega) = \infty$.*

Ces résultats montrent que l'on peut caractériser les sous-modules \mathcal{H}_k au moyen d'un nombre fini de vecteurs colonne. Ceci permet d'obtenir une condition suffisante vérifiable pour l'accessibilité.

Théorème 8 *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- i) le système Σ n'a pas d'élément autonome
- ii) $\mathcal{H}_\infty = 0$
- iii) $[g_1, \dots, g_n]^\perp = 0$
- iv) $\text{rang par lignes}_{\mathcal{K}[\nabla]}[g_1, \dots, g_n] = n$

L'exemple présenté par la suite montre qu'au delà du résultat principal, le calcul des g_k permet de donner des conclusions définitives sur l'accessibilité d'un système dans certains cas.

Exemple 6 (suite) *Pour le système (2.2) on a*

$$\mathcal{H}_\infty = \left[\begin{array}{ccc} x_1 + \nabla^2 & u_{1,0}\nabla^2 - u_{1,2} & (u_{1,0}^2 - \dot{u}_{1,0})\nabla^2 - \dot{u}_{1,2} \\ 1 + \nabla & 0 & 0 \\ \nabla - \nabla^2 & 0 & 0 \end{array} \right]^\perp$$

d'où on peut déduire que $(\nabla - \nabla^2)dx_2 - (1 + \nabla)dx_3$ est dans \mathcal{H}_∞ . Cet élément étant intégrable (même exact), on peut affirmer que le système n'est pas accessible.

Le seul problème ouvert demeure celui de l'intégrabilité de \mathcal{H}_∞ .

2.2 Structure des systèmes à retards

L'inversion d'un système carré est un sujet important. Elle consiste à trouver un système Σ^{-1} , qui a comme entrée la sortie y désirée (où mesurée) du système Σ , et dont les sorties sont égales aux entrées u qui produisent y , si les conditions initiales sont adéquates.

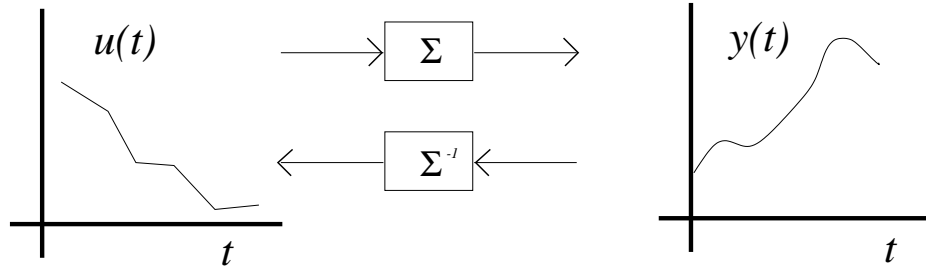


FIG. 2.1 – Un système Σ et son inverse Σ^{-1} .

L'intérêt principal pour résoudre ce problème est que, lorsque le système inverse existe, il peut nous donner les lois de commande que engendrent une trajectoire désirée quelconque. Ayant pour but cette application, on peut accepter, pour les systèmes à retards, des systèmes inverses avec des avances dans le temps pour la sortie car la trajectoire désirée est connue à l'avance.

La résolution de ce problème pour les systèmes sans retard est fondée sur un algorithme dû à Singh [56], développé à partir des travaux de Silverman [54].

On présente par la suite une extension de cet algorithme pour les systèmes non linéaires à retards. Elle permet de définir des notions de rang et d'invertibilité pour cette classe de systèmes. Une application de cette notion sera montrée dans la section 3.2.

2.2.1 Algorithme de structure

L'extension de l'algorithme de Singh au cas de systèmes non linéaires à retards est donnée par l'Algorithme 3.

Cet algorithme converge au plus après n étapes, car $\{\rho_k\}$ est une séquence non décroissante d'entiers bornée par le nombre d'entrées et de sorties.

Le rang ρ du système est défini comme

$$\rho := \max\{\rho_k, k \geq 1\}.$$

Algorithme 3 Algorithme de structure pour les syst. à retards.

Etape 0

$\rho_0 = 0$, $\tilde{F}_0 = 0$ et

$$F_0 := \mathbf{y}_0 - h(\mathbf{x}) \equiv 0$$

Etape k+1

A l'étape précédente, on a défini les fonctions \tilde{F}_k et F_k :

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_k \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_k(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k)}) \\ a_k(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k)}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_k(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k-1)}, \delta) \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_0$$

avec $\text{rank}_{\mathcal{K}[\delta]} \tilde{b}_k(\cdot) = \text{rank}_{\mathcal{K}[\delta]} \tilde{F}_k = \rho_k = \text{dimension de } \tilde{F}_k$.

Dériver F_k par rapport au temps :

$$\dot{F}_k = \bar{a}_{k+1}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k+1)}) + \bar{b}_{k+1}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k)}, \delta) \mathbf{u}_0$$

et définir

$$\rho_{k+1} = \text{rank}_{\mathcal{K}[\delta]} \begin{bmatrix} \tilde{b}_k(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k-1)}, \delta) \\ \bar{b}_{k+1}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k)}, \delta) \end{bmatrix}.$$

Permuter les composantes de \dot{F}_k pour que les premières ρ_{k+1} lignes de $[\tilde{b}_k^T \quad \bar{b}_{k+1}^T]^T$ soient linéairement indépendantes sur $\mathcal{K}[\delta]$, et définir

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{F}_{k+1} \\ \hat{F}_{k+1} \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{\rho_{k+1}} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{p-\rho_{k+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{F}_k \\ \dot{F}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{a}_{k+1}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k+1)}) \\ \hat{a}_{k+1}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k+1)}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_{k+1}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k)}, \delta) \\ \hat{b}_{k+1}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k)}, \delta) \end{bmatrix} \mathbf{u}_0 \end{aligned}$$

Trouver des matrices $\tilde{S}_{k+1} \in \mathcal{K}^{(p-\rho_{k+1}) \times \rho_{k+1}}[\delta]$ et $\hat{S}_{k+1} \in \mathcal{K}^{(p-\rho_{k+1}) \times (p-\rho_{k+1})}[\delta]$ telles que

$$\tilde{S}_{k+1} \tilde{b}_{k+1} + \hat{S}_{k+1} \hat{b}_{k+1} = 0 \quad \text{et} \quad \text{rank}_{\mathcal{K}[\delta]} \hat{S}_{k+1} = p - \rho_{k+1}.$$

Finalement, définir $F_{k+1}(x, \dot{y}) = \tilde{S}_{k+1} \tilde{F}_{k+1} + \hat{S}_{k+1} \hat{F}_{k+1}$, ce qui donne

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_{k+1} \\ F_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{k+1}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k+1)}) \\ a_{k+1}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k+1)}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_{k+1}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k)}, \delta) \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_0. \quad (2.3)$$

2.2.2 Systèmes inverses

Dans cette section, on va considérer le problème de trouver l'inverse d'un système non linéaire à retards. Pour ce faire, prenons d'abord le système (sans retard) défini par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,0} &= x_{2,0}u_{1,0} \\ \dot{x}_{2,0} &= u_{1,0} \\ y_{1,0} &= x_{1,0}\end{aligned}$$

qui admet le système inverse suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_{1,0} &= (\eta_{1,0}\ddot{y}_{1,0} - \eta_{1,0}^3)/\dot{y}_{1,0} \\ u_{1,0} &= \eta_{1,0}.\end{aligned}$$

Si l'on rajoute un retard au modèle de départ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,0} &= x_{2,0}\delta u_{1,0} \\ \dot{x}_{2,0} &= u_{1,0} \\ y_{1,0} &= x_{1,0}\end{aligned}\tag{2.4}$$

on obtient les relations :

$$\begin{aligned}\dot{y}_{1,0} &= x_{2,0}u_{1,1} \\ \ddot{y}_{1,0} &= u_{1,0}u_{1,1} + \dot{u}_{1,1}\dot{y}_{1,0}/u_{1,1}.\end{aligned}$$

La recherche d'un système inverse à partir de ces relations donne des solutions anticipatives (donc, non réalisables), comme par exemple :

$$\begin{aligned}\delta\dot{\eta}_{1,0} &= (\eta_{1,1}\ddot{y}_{1,0} - \eta_{1,0}\eta_{1,1}^2)/\dot{y}_{1,0} \\ u_{1,0} &= \eta_{1,0}.\end{aligned}$$

Dans [41] (voir Annexe A), on a défini une classe assez générale de systèmes inverses ; un cas particulier, qui est le seul à être considéré dans ce rapport, est décrit par

$$\begin{aligned}R[\delta]\delta^\tau \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 &= F(\mathbf{y}^{(k)}, \boldsymbol{\eta}_i; i \geq \tau, k \in \mathbb{N}) \\ P[\delta]\delta^\tau \mathbf{u}_0 &= H(\mathbf{y}^{(k)}, \boldsymbol{\eta}_i; i \geq \tau, k \in \mathbb{N})\end{aligned}\tag{2.5}$$

où les matrices carrées $R[\delta] \mid_{\delta=0}$ et $P[\delta] \mid_{\delta=0}$ sont de rang plein.

Définition 29 *Le système (2.5) est un inverse à gauche du système Σ si la sortie \mathbf{u}_0 (2.5) est égale à l'entrée \mathbf{u}_0 de Σ lorsque la sortie \mathbf{y}_0 de Σ est égale à l'entrée \mathbf{y} de (2.5) avec des conditions initiales adéquates.*

Définition 30 *Le système Σ est dit inversible à gauche s'il admet un inverse à gauche.*

Pour les systèmes sans retard, l'existence d'un inverse est caractérisé par le rang du système. Cette condition est toujours nécessaire pour les systèmes à retards ; cependant, comme le montre le système (2.4), elle n'est plus suffisante ; on a donc besoin de conditions supplémentaires pour assurer l'existence d'un système inverse. Pour les trouver, supposons que l'algorithme ait convergé à l'étape k . A partir de l'équation (2.3) on a

$$d\tilde{F}_k = \tilde{a}(\nabla)d\mathbf{x}_0 + \tilde{b}_k(\cdot, \nabla)d\mathbf{u}_0 \quad (2.6)$$

avec $\text{rang par lignes}_{\mathcal{K}[\nabla]}\{\tilde{b}_k(\cdot, \nabla)\} = \rho_k$.

On met (2.6) sous la forme

$$d\tilde{F}_k = \text{diag}\{p_i(\nabla)\nabla^{\mu_i}\} [A(\nabla)d\mathbf{x}_0 + B(\nabla)d\mathbf{u}_0] + \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{\rho_k} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

avec $p_i(\nabla) \in \mathcal{K}[\nabla]$, $p_i(0) \neq 0$, $\mu_i \in \mathbb{N}$, et $\omega_i \in \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]}\{d\mathbf{y}, d\dot{\mathbf{y}}, \dots\}$, pour $i \in 1, \dots, \rho_k$.

Une condition suffisante pour l'existence d'un inverse à gauche est maintenant rappelée (voir Annexe B) :

Théorème 9 *Le système Σ a un inverse à gauche si*

$$\text{rang par lignes}_{\mathcal{K}[\nabla]} B(\nabla) |_{\nabla=0} = m. \quad (2.8)$$

Un exemple illustratif peut être trouvé dans [41] (Annexe B).

2.3 Lien avec d'autres travaux

Accessibilité

Quelques auteurs ont déjà abordé le sujet de la commandabilité pour les systèmes non linéaires à retards. On trouve ainsi une étude d'un réacteur chimique [45] et une autre sur les systèmes bilinéaires [6].

Les contributions par rapport à ces travaux sont la définition formelle d'accessibilité proposée, et une condition vérifiable sous laquelle un système donné possède cette propriété.

Le Théorème 8 peut être vu comme la généralisation de la condition algébrique présentée dans [3, 4]. Sa particularité est qu'il ne demande pas le calcul des sous-modules \mathcal{H}_k . Ces sous-modules étant en général de dimension infinie, on ne peut pas employer les conditions (basées sur leur dimension) que l'on trouve dans les travaux cités précédemment.

Les conditions du Théorème 8 deviennent, dans les contextes adéquats, une condition nécessaire et suffisante pour l'accessibilité forte (systèmes sans retard [4, 58]), pour la commandabilité faible (systèmes linéaires à retards [43]), et pour la commandabilité (systèmes linéaires variants dans le temps [55]).

Finalement, il faut remarquer que l'on peut arriver à ce même résultat en utilisant un formalisme développé dans [51].

Inversion de systèmes

L'inversion pour les systèmes non linéaires à retards a été considérée pour la première fois dans [14].

La condition présentée dans ce rapport est moins générale que celle du travail précédemment cité. Par contre, elle a l'avantage d'être constructive.

2.4 Conclusions

Deux aspects structurels des systèmes à retards ont été présentés. Le premier concerne l'accessibilité, où une définition de cette propriété et des conditions vérifiables sous lesquelles un système la possède, ont été proposées. Ces conditions demandent un nombre de calculs moindre (par rapport aux autres critères disponibles) pour être vérifiées dans le cas de systèmes non linéaires sans retard.

Lors de la résolution du problème du rejet de perturbation, dans le Chapitre suivant, nous redéfinirons \mathcal{H}_∞ relativement à un seul type d'entrées, sachant que le système est soumis aux entrées de commande et aux entrées de perturbation.

Le deuxième aspect concerne l'inversion d'un système. A ce sujet on a présenté une extension de l'algorithme de structure de Singh. On montre que la convergence de cet algorithme ne suffit pas pour l'existence d'un système inverse, et des conditions supplémentaires pour le garantir ont été proposées. A notre meilleure connaissance, cet algorithme est innovant aussi dans le cas particulier de systèmes linéaires à retards.

Chapitre 3

Rejet de perturbations

3.1 Définition du problème

La synthèse d'une loi de commande est généralement effectuée à partir d'un modèle mathématique élémentaire.

Ce modèle diffère du processus réel pour plusieurs raisons ; parmi les principales on trouve des erreurs de modélisation et/ou d'identification, des bruits, et des perturbations. Une particularité de ces dernières est qu'elles peuvent être incluses dans le modèle en tant qu'entrées sur lesquelles on ne peut pas agir et que, très souvent, on ne peut pas mesurer non plus.

Un des problèmes majeurs de la commande est d'assurer le fonctionnement du système malgré la présence de ces perturbations. Ainsi, le problème de rejet de perturbations consiste à éliminer leur influence sur les sorties d'un système Σ , ce qui peut être fait d'une façon parfaite ou asymptotique.

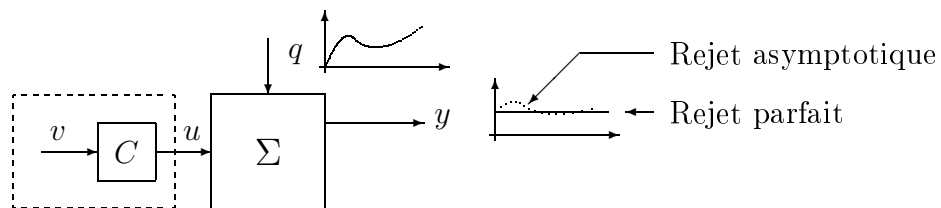


FIG. 3.1 – L'effet de la perturbation q sur la sortie y est anéanti par le compensateur C .

La classe de systèmes qui sera considérée est modélisée par

$$\Sigma_d : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_0 &= f(\mathbf{x}) + \sum_{i=0}^r (g_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + p_i(\mathbf{x}) \mathbf{q}_i) \\ \mathbf{y}_0 &= h(\mathbf{x}) \end{cases}$$

où \mathbf{q}_j représente le vecteur de perturbations $[q_1, \dots, q_r]^T$ à l'instant $t - j$. Le problème du rejet de perturbations est maintenant défini.

Définition 31 (Problème de rejet de perturbations) *Soit le système Σ_d , avec des entrées de commande \mathbf{u} et des sorties \mathbf{y} , affecté par des perturbations \mathbf{q} . Trouver, si possible, un compensateur C , tel que les sorties \mathbf{y} ne soient pas affectées par les perturbations \mathbf{q} ; plus précisément, tel que, pour le système compensé, la relation*

$$d\mathbf{y}^{(k)} \in \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{d\mathbf{x}, d\mathbf{v}, \dots, d\mathbf{v}^{(k-1)}\}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

où \mathbf{v} est la nouvelle entrée de commande, soit vérifiée.

Ce problème a été traité depuis longtemps pour les systèmes sans retard, où une solution complète est disponible (voir, par exemple [47] et références incluses). Cette solution standard conduit à la perte maximale d'observabilité, ce qui n'est pas toujours applicable dans le cas de systèmes à retards si l'on se restreint à des compensateurs causaux.

Exemple 7 *Soit le système*

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,0} &= x_{2,0}(u_{1,1} - x_{3,2}) + x_{1,0}x_{1,1} \\ \dot{x}_{2,0} &= -x_{1,0}^2 \\ \dot{x}_{3,0} &= q_{1,0} \\ y_{1,0} &= x_{1,0}. \end{aligned}$$

A partir de

$$\dot{y}_{1,0} = x_{2,0}(u_{1,1} - x_{3,2}) + x_{1,0}x_{1,1},$$

on obtient la solution élémentaire

$$u_{1,0} = (v_{1,0} - x_{1,-1}x_{1,0})/x_{2,-1} + x_{3,1}.$$

Cette solution n'est pas causale, car elle demande la connaissance de x_1 et x_2 à l'instant $t + 1$ (notés $x_{1,-1}$ et $x_{2,-1}$). Néanmoins, avec le compensateur causal suivant :

$$u_{1,0} = v_{1,0} + x_{3,1},$$

on obtient

$$\dot{y}_{1,0} = x_{2,0}v_{1,1} + x_{1,0}x_{1,1}.$$

Le lecteur peut vérifier que la sortie n'est plus affectée par la perturbation \mathbf{q} .

Cet exemple permet d'illustrer l'idée de base des solutions qui seront présentées dans ce chapitre : une partie de l'état (x_1 et x_2 en l'occurrence) n'a pas besoin d'être rendue inobservable pour rejeter la perturbation. La question est alors de l'identifier. La recherche de cette réponse a conduit à la définition du sous-module $\Omega \subset \mathcal{M}$ associé au système Σ_d [42] :

$$\Omega := \{\omega \in \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]}\{\mathbf{dx}\} \mid \forall k \in \mathbb{N}, \quad \omega^{(k)} \in \text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]}\{\mathbf{dx}, \mathbf{dy}, \mathbf{d\dot{y}}, \dots\}\}.$$

Ce sous-module peut être calculé en tant que limite de la séquence

$$\begin{aligned} \Omega_0 &:= \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]}\{\mathbf{dx}\} \\ \Omega_{k+1} &:= \{\omega \in \Omega_k \mid \dot{\omega} \in \text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]}\{\Omega_k + \frac{d}{dt}(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})\}\} \end{aligned}$$

avec $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} := \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]}\{\mathbf{dx}\} \cap \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]}\{\mathbf{dy}, \mathbf{d\dot{y}}, \dots\}$ et \mathbf{y} les sorties de Σ_d .

Remarque 8 Dans le cas de systèmes sans retard, Ω est équivalent à la notion standard d'un sous-espace de commandabilité ou d'une codistribution de commandabilité.

Ω est, en quelque sorte, une extension de \mathcal{H}_∞ (cf. Chapitre 2), en considérant les dérivées de \mathbf{y} comme des paramètres.

Dans les sections suivantes, on va présenter des solutions statiques et dynamiques avec retards au problème de rejet de perturbations. Ces solutions font appel aux notions de degré et décalage relatifs [42].

Définition 32 Le système Σ_d a un degré relatif ρ s'il existe un entier non négatif ρ tel que

$$\rho = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{\partial y_{1,0}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}} \neq 0\}. \quad (3.1)$$

Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\partial y_{1,0}^{(k)} / \partial \mathbf{u} = 0$, alors $\rho = \infty$.

Définition 33 Le décalage relatif est défini pour tout système Σ_d ayant un degré relatif fini ρ , comme l'entier non négatif μ satisfaisant

$$\mu = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{\partial y_{1,0}^{(\rho)}}{\partial u_{1,k}} \neq 0\}. \quad (3.2)$$

Remarque 9 Dans le cas particulier des systèmes sans retard, la notion de degré relatif, donnée par (3.1), est équivalente à la notion standard pour ces systèmes. Le décalage relatif est, en quelque sorte, équivalent à la notion de degré relatif pour les systèmes discrets.

3.2 Solution statique bicausale

Considérons d'abord le cas monovariable, où l'existence d'une solution bicausale au rejet de perturbations est caractérisée comme suit.

Théorème 10 *Considérons le système Σ_d avec $m = p = 1$. Le rejet de perturbation peut être résolu par compensation bicausale si, et seulement si, il existe $\omega_0 \in \mathcal{E}$ tel que*

- i) $\omega_0 \in \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{d\mathbf{x}_\mu, du_{1,\mu}\},$*
- ii) $d\mathbf{y}_0^{(\rho)} - \omega_0 \in \Omega,$ et*
- iii) $\text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\omega_0\}$ soit intégrable.*

Ces conditions impliquent que (voir Annexe A) :

- il existe une fonction $\varphi(\cdot)$ telle que $\omega_0 = \alpha(\nabla)d\varphi$ (cond. iii),
- $\varphi(\cdot)$ dépende de l'entrée u (cond. ii) et déf. du degré relatif ; plus encore, qu'elle dépende de la valeur de l'entrée à l'instant t (cond. i) et déf. du décalage relatif) :

$$\frac{\partial \varphi(\cdot)}{\partial u_{1,0}} \neq 0$$

- $dy^{(\rho+k)} \in \Omega + \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{d\varphi, \dots, d\varphi^{(k)}\}$ (cond. ii).

A partir de ceci, il est facile de montrer que

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = v_0$$

admet une solution statique (avec retards) u_0 qui rejette la perturbation.

Il reste que le problème du choix de ω_0 , qui n'est pas unique. En effet, si l'on reprend l'exemple précédent, les 1-formes

$$\begin{aligned} \omega_0 &= x_{2,0}d(u_{1,1} - x_{3,2}), \quad \text{et} \\ \omega'_0 &= x_{2,0}d(u_{1,1} - x_{3,2}) + x_{1,0}dx_{1,1} \end{aligned}$$

satisfont toutes les deux les conditions i) et ii). Cependant, seulement la première satisfait iii). Pour contourner cet inconvénient, notons d'abord que, si le problème est résolu, alors pour le système compensé

$$\text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\Omega + \dot{\Omega}\} = \Omega \oplus \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{dv_0\} \quad (3.3)$$

et, dans tous les cas,

$$\begin{aligned} \text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\Omega + \dot{\Omega}\} &= \text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \left\{ \Omega + \frac{d}{dt}(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \right\} \\ &= \text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \left\{ \Omega + \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{dy_{1,0}^{(\rho)}\} \right\}. \end{aligned}$$

On a le résultat suivant.

Théorème 11 *Considérons le système Σ_d avec $m = p = 1$. Le rejet de perturbations admet une solution par compensation bicausale si, et seulement si,*

- a) $du_{1,0} \in \text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ \Omega + \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ dy_{1,0}^{(\rho)} \} \} + \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ d\mathbf{x}_0, du_{1,1} \}$
- b) $\dim (\text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ \Omega + \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ dy_{1,0}^{(\rho)} \} \})^* = \dim \Omega^* + 1$

où $\dim(\cdot)^*$ représente la dimension du plus grand sous-module intégrable contenu dans (\cdot) .

Preuve.

Nécessité. Supposons que le problème ait été résolu par compensation bicausale. Alors,

$$p_0 du_{1,0} = q(\nabla) dv_{1,0} + f'(\nabla) d\mathbf{x}_0 + p'(\nabla) du_{1,1}, \quad p_0 \neq 0$$

et

$$\text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ \Omega + \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ dy_{1,0}^{(\rho)} \} \} = \Omega \oplus \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ dv_{1,0} \}; \quad (3.4)$$

donc,

$$\begin{aligned} \text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ \Omega + \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ dy_{1,0}^{(\rho)} \} \} &\supset \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ q(\nabla) dv_{1,0} \} \\ &\supset \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ p_0 du_{1,0} - f'(\nabla) d\mathbf{x}_0 - p'(\nabla) du_{1,1} \} \end{aligned}$$

A partir de cette relation, il est simple de montrer la nécessité de a). La nécessité de la deuxième condition découle directement de (3.4).

Suffisance. A partir de b), il existe une fonction φ telle que

$$\text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ \Omega + \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ dy_{1,0}^{(\rho)} \} \} = \Omega + \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ d\varphi \};$$

la condition a) implique que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_{1,0}} \neq 0$$

et alors, une solution peut être obtenue à partir de $\varphi = v_{1,0}$. ■

Cette même idée a été étendue au cas multivariable, et une condition d'existence d'une solution bicausale peut s'écrire comme suit.

Théorème 12 *Soit le système Σ_d avec m entrées et p sorties. Il existe une solution statique bicausale au problème de rejet de perturbations si*

- i) $\Omega \subset P^\perp$
- ii) $d\mathbf{u}_0 \in \left(\text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ \Omega + \dot{\Omega} \} + \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ d\mathbf{x}_0, d\mathbf{u}_1 \} \right)$
- iii) $\dim_{\mathcal{K}[\nabla]} \left(\text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{ \Omega + \dot{\Omega} \} \right)^* = \dim \Omega^* + m$

avec $P := \sum_i p_i(\mathbf{x}) \nabla^i$. Si le rang du système (cf. §2.2.2) est égal au nombre d'entrées (c'est-à-dire, si le système est inversible à gauche), ces conditions deviennent aussi nécessaires (voir Annexe B).

Remarque 10 On note l'inclusion d'une troisième condition par rapport au cas monovarié. Ceci est dû au fait que, dans ce cas particulier, les conditions i) et ii) du Théorème 11 sont équivalentes.

3.3 Solution dynamique

Lorsque le problème n'a pas de solution par retour statique avec retards, on recherche des solutions dans la classe (plus générale) des compensateurs dynamiques. Des conditions suffisantes pour l'existence de telles solutions seront présentées maintenant.

Rappelons d'abord la notion suivante.

Définition 34 [42] Soit le système Σ_d . Il a un degré relatif σ vis-à-vis de la perturbation q si

$$\sigma = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{\partial y_{1,0}^{(k)}}{\partial \mathbf{q}} \neq 0\} \quad \text{est fini.}$$

Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\partial y_{1,0}^{(k)} / \partial \mathbf{q} = 0$, alors $\sigma = \infty$.

Si $\sigma = \infty$, le système est déjà découplé de la perturbation. On ne considère par la suite que le cas où σ est fini.

Théorème 13 Soit le système Σ_d . Supposons qu'il ait des degrés relatifs ρ et σ finis, et un décalage relatif μ . On définit la forme différentielle

$$\omega_0 := \sum_{\ell \geq \mu} \left[\frac{\partial \mathbf{y}_0^{(\sigma-1)}}{\partial \mathbf{x}_\ell} d\mathbf{x}_\ell + \sum_{i=0}^{\sigma-\rho-1} \frac{\partial \mathbf{y}_0^{(\sigma-1)}}{\partial \mathbf{u}_\ell^{(i)}} du_\ell^{(i)} \right]$$

Il existe un compensateur dynamique qui rejette la perturbation q si

- i) $\text{cls}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\omega_0\}$ est intégrable
- ii) $dy_{1,0}^{(k)} \in \text{span}_{\mathcal{K}} \{d\mathbf{x}, \nabla^\ell \omega_0^{(i)}, \ell \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq k - \rho\}$, pour tout $k \geq \sigma - 1$.

Preuve. Voir l'Annexe A. ■

Corollaire 2 *Soit le système Σ_d avec degrés relatifs finis ρ et σ , et un décalage relatif μ , et la forme différentielle suivante :*

$$\omega_0 := \frac{\partial y_{1,0}^{(\sigma-1)}}{\partial \mathbf{x}_\mu} d\mathbf{x}_\mu + \sum_{i=0}^{\sigma-\rho-1} \frac{\partial y_{1,0}^{(\sigma-1)}}{\partial u_{1,\mu}^{(i)}} du_{1,\mu}^{(i)}. \quad (3.5)$$

Le problème de rejet de perturbations admet une solution dynamique sans mémoire si

- i) $cls_{\mathcal{K}[\nabla]} \{\omega_0\}$ est intégrable*
- ii) $dy_{1,0}^{(k)} \in \text{span}_{\mathcal{K}} \{d\mathbf{x}, \nabla^\ell \omega^{(i)}, \ell \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq k - \rho\}$,
pour tout $k \geq \sigma - 1$.*

3.4 Lien avec d'autres travaux

Le cas monovarié du problème de rejet de perturbations à été traité par plusieurs auteurs. En dehors de nos contributions on trouve :

- une approche géométrique [62],
- une approche de systèmes à perturbations singulières [62],
- une approche de linéarisation [62], et
- une approche de discrétisation [2]

Leurs résultats sont résumés et comparés avec les nôtres dans le tableau 3.1.

On remarque que les conditions nécessaires et suffisantes données pour les approches de perturbations singulières et de discrétisation sont par rapport à une approximation du système original. Elles ne sont que suffisantes pour le système de départ.

Dans le cas multivariable, ce n'est que tout récemment que notre approche, appliqué aux systèmes linéaires à retards (modélisés sur un anneau principal), a pu être écrit sous un formalisme géométrique et donc, être comparée avec une approche disponible dans la littérature [5, 12]. L'équivalence des conditions proposées par ces deux approches à été montrée dans [36].

Finalement, on remarque que la notion de degré relatif, qui a été employée aussi pour étudier le problème de linéarisation entrée-sortie dans [19], n'est pas unifiée, comme le montre le Tableau 3.2, où sont interprétées diverses versions trouvées dans la littérature.

On note que, bien que pour les systèmes sans retard, toutes ces définitions coïncident avec la notion classique, elles sont toutes différentes dans le cas plus général de systèmes à retards.

Approche	Systèmes considérés		Solutions					
	Type	Retards	NC	RESSM	RESAR	PS	BC	DG
Velasco M. [62]								
Géométrie	MIMO	1 sur l'entrée	CS					
Pert. sing.	MIMO	1 sur l'entrée		CNS				
Linéarisation	SISO	1 (h) sur l'état, 1 (k) sur l'entrée, $h \geq k \geq 0$			CNS			
Alvarez Ja. et Alvarez Jq. [2]								
Discrétisation	SISO	plusieurs sur l'entrée, l'état et la sortie			CNS			
Moog <i>et al.</i> [42], Marquez, Moog et Velasco [40]								
Algébrique	SISO	plusieurs sur l'entrée, l'état et MIMO la perturbation		CS	CS	CS	CNS CS*	CS

NC	=	Solution non causale
RESSM	=	Solution par retour d'état statique sans retard
RESAR	=	Solution par retour d'état statique avec retards
PS	=	Solution "pure shift"
BC	=	Solution bicausale
DG	=	Solution dynamique (générale).
*	=	Aussi nécessaire pour les systèmes inversibles à gauche

TAB. 3.1 – Comparaison des contributions au problème de rejet de perturbations de systèmes à retards.

Dans l'approche	le degré relatif indique le nombre de fois qu'il faut dériver (ou itérer) la sortie pour avoir une dépendance explicite de
Géométrie [62]	$u(t - \tau)$, τ unique
Géométrie [19]	$u(t)$
Perturbations singulières [62]	$u(t)$ dans le modèle approché
Linéarisation [62]	$u(t - \tau)$ dans l'approximation linéaire, τ quelconque
Discrétisation [2]	$u(k)$ dans le modèle discrétisé
Algébrique [42]	$u(t - \tau)$, τ quelconque

TAB. 3.2 – Interprétation de plusieurs définitions de degré relatif.

3.5 Conclusions

Dans ce Chapitre, notre formalisme mathématique a été employé pour apporter des solutions causales exactes au problème de rejet de perturbations. Une solution complète par retour statique d'état a été donnée, ainsi que des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution dynamique.

Il est à souligner que ces résultats se distinguent de ceux existant dans la littérature car

- ils sont valables sous des hypothèses non restrictives sur le système considéré,
- ils ne résultent pas d'approximations (linéarisation, perturbations singulières, ...)

Dans cette mesure, nous apportons des résultats qui se veulent pionniers, et qui peuvent mettre en lumière des solutions originales pour des problèmes tels que le découplage ou la poursuite de modèle.

Chapitre 4

Linéarisation entrée–sortie

Un problème important de l'automatique consiste à modifier la représentation d'un système et/ou sa dynamique, de telle sorte qu'il soit équivalent à un système linéaire. Ceci peut être fait par deux types de transformation :

- i) par injections additives de sortie [49]
- ii) par bouclage [24, 25]

Le premier cas, est un problème purement de représentation du système. Le deuxième est un problème de commande, dont la solution peut demander de modifier la dynamique (avec un compensateur) et la représentation du système (par un changement de coordonnées).

Ce problème réside au cœur du développement de l'automatique non linéaire car, s'il existe une solution, on peut utiliser la théorie (plus développée) des systèmes linéaires sur le système compensé. Il a été résolu pour les systèmes sans retard depuis plus de vingt ans (le lecteur intéressé, peut trouver un historique dans [24, 25, 49]).

Dans le cas de systèmes à retards, seul le problème de linéarisation de systèmes à retards par bouclage, a été considéré par quelques auteurs [19], sous des hypothèses très restrictives, évacuant la problématique réelle associée à cette classe de systèmes.

Dans ce chapitre, on montre que la solution au problème de linéarisation par injections additives de sortie est caractérisé à l'aide d'une extension de l'algorithme proposé dans [66].

Ce résultat est utilisé pour :

- trouver une solution complète au problème de linéarisation par retour statique de sortie (§4.2)

- donner une condition suffisante pour la synthèse d’un observateur pour les systèmes à retards (§4.5).

Puis, dans la Section 4.3, on présente des conditions sous lesquelles le problème de linéarisation admet une solution par retour d’état (statique et dynamique).

Finalement, dans la Section 4.4, on montre que la linéarisation d’un système, en combinaison avec les résultats sur la stabilité de systèmes linéaires à retards, nous permet de donner une solution au problème de poursuite de trajectoire.

4.1 Définition du problème

Dans sa formulation classique (voir, par exemple, [24, 25]), le problème de linéarisation entrée–sortie consiste à trouver un compensateur et une transformation d’état, tels que le système puisse être décomposé en deux sous-systèmes : une partie linéaire (commandable et observable), et une autre non linéaire, non observable.

Pour le cas des systèmes à retards, une telle formulation ne peut être reprise directement pour plusieurs raisons. D’abord, il n’y a pas de définition de changement de coordonnées pour les systèmes non linéaires à retards qui soit acceptée de manière générale. De plus, il existe plusieurs définitions de commandabilité et d’observabilité pour les systèmes linéaires à retards [16, 30, 31, 43, 48, 53], ce qui ouvre le problème de déterminer laquelle est la plus adéquate dans la formulation du problème. Finalement, certains systèmes linéaires à retards n’acceptent pas de réalisation observable et commandable [32].

Pour contourner ces discussions, le problème de linéarisation entrée–sortie sera défini en termes de l’existence d’une équation différentielle et aux différences linéaire pour le système en boucle fermée plutôt qu’en termes de l’existence d’une forme particulière de l’équation de l’espace d’état.

Définition 35 (Linéarisation entrée–sortie) *Soit le système non linéaire à retards Σ , avec degré relatif fini ρ . Trouver, si possible, un compensateur causal C , tel que le système en boucle fermée satisfasse*

$$\begin{aligned} i) \quad d\bar{y}_{1,0}^{(k)} &\in \text{span}_{\mathbb{R}[\delta]} \{d\bar{y}_{1,0}, \dots, d\bar{y}_{1,0}^{(k-1)}, dv_{1,0}, \dots, dv_{1,0}^{(k-1)}\} \\ ii) \quad d\bar{y}_{1,0}^{(k)} &\notin \text{span}_{\mathbb{R}[\delta]} \{d\bar{y}_{1,0}, \dots, d\bar{y}_{1,0}^{(k-1)}\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$. $\bar{y}_{1,0}$ représente la sortie du système en boucle fermée

et $v_{1,0}$ la nouvelle entrée de commande.

Remarque 11 *La condition ii) assure la commandabilité de la sortie et évite des solutions triviales.*

4.2 Solutions par retour de sortie

Dans cette section, on considère le cas où la seule mesure disponible pour la commande est la sortie du système. On cherche les conditions sous lesquelles le problème admet une solution en n'utilisant que cette information.

On montrera que, pour répondre à cette question, il est nécessaire de savoir si la sortie peut s'écrire sous la forme

$$y_{1,0}^{(\bar{n})} = \sum_{j=1}^{\bar{n}} \Phi_j^{(j-1)}(\mathbf{y}, \mathbf{u}). \quad (4.2)$$

Dans le cas particulier des systèmes sans retard, cela se réduit à demander que le système soit linéarisable par des injections additives de sortie [49]. Cette condition peut être vérifiée sur les systèmes à retards avec l'Algorithme 4, qui est en fait une adaptation de l'algorithme proposé dans [66].

Soit $E^0 = 0$, $E^k = \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{dy_{1,0}, \dots, dy_{1,0}^{(k-1)}, du_{1,0}, \dots, du_{1,0}^{(k-1)}\}$. Si la relation (4.2) est satisfaite, alors

$$dy^{(\bar{n})} = d[\Phi_1(\mathbf{y}, \mathbf{u})]^{(\bar{n}-1)} + \dots + d\Phi_{\bar{n}}(\mathbf{y}, \mathbf{u}). \quad (4.3)$$

Sous l'hypothèse suivante

$$\dim_{\mathcal{K}[\nabla]} E^{\bar{n}} = 2\bar{n}, \quad (4.4)$$

l'Algorithme 4 donne un moyen de vérifier (4.3). Les conditions sont énoncées en termes d'intégrabilité de certaines 1-formes différentielles.

Lemme 3 *Sous l'hypothèse (4.4), $dy^{(\bar{n})} \in \mathcal{E}$ peut être écrit sous la forme (4.3) si, et seulement si, $dy^{(\bar{n})} \in E^{\bar{n}}$ et*

$$d\bar{\omega}_i = 0, \quad i = 1, \dots, \bar{n}. \quad (4.6)$$

Un premier résultat peut être énoncé.

Algorithme 4 Linéarisation par injections additives de sortie.

si $dy^{(\bar{n})} \notin E^{\bar{n}}$. **alors**

Fin de l'algorithme.

sinon

Etape 1 :

Choisir des fonctions $\xi_1, \theta_1 \in \mathcal{K}[\nabla]$ telles que

$$\omega_1 - \xi_1 dy^{(\bar{n}-1)} - \theta_1 du^{(\bar{n}-1)} \in E^{\bar{n}-1}. \quad (4.5)$$

$$\bar{\omega}_1 := \xi_1 dy + \theta_1 du.$$

Si $d\bar{\omega}_1 \neq 0$ alors fin de l'algorithme.

Etape ℓ ($\ell = 2, \dots, \bar{n}$) :

Soit $\Phi_{\ell-1}(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ telle que $d\Phi_{\ell-1} = \bar{\omega}_{\ell-1}$.

$\omega_\ell := \omega_{\ell-1} - d\Phi_{\ell-1}^{(\bar{n}-\ell+1)}$. Choisir $\xi_\ell, \theta_\ell \in \mathcal{K}[\nabla]$ telles que

$$\omega_\ell - \xi_\ell dy^{(\bar{n}-\ell)} - \theta_\ell du^{(\bar{n}-\ell)} \in E^{\bar{n}-\ell}.$$

Définir la 1-forme différentielle $\bar{\omega}_\ell$ comme

$$\bar{\omega}_\ell = \xi_\ell dy - \theta_\ell du.$$

Vérifier si $d\bar{\omega}_\ell = 0$. Si non, stop !

Fin de l'algorithme.

fin si

Théorème 14 *Considérons le système Σ avec une entrée u , une sortie y , et degré relatif ρ . Le problème de linéarisation entrée-sortie admet une solution par retour de sortie avec retards pour ce système si, et seulement si,*

- i) dy peut s'écrire sous la forme (4.3),
- ii) $\dim_{\mathbb{R}[\delta]} \{dy_{1,0}, d\Phi_1, \dots, d\Phi_{\bar{n}}\} = 2$
- iii) $cls_{\mathbb{R}[\nabla]} \{dy_{1,0}, d\Phi_\rho\} \subset span_{\mathcal{K}[\nabla]} \{dy_{1,0}, du_{1,0}\}$
 $\not\subset span_{\mathcal{K}[\nabla]} \{dy_{1,0}, du_{1,1}\}.$

Preuve. Voir Annexe C. ■

Remarque 12 *La première condition indique simplement que l'entrée doit agir sur la sortie avant la perturbation. La deuxième implique l'existence d'une fonction $\bar{\Phi}$ et des coefficients $a_i, b_i \in \mathbb{R}[\nabla]$ tels que*

$$\Phi_i = a_i \bar{\Phi} + b_i y_{1,0}, \quad i = 1 \dots \bar{n}$$

Finalement, la troisième condition implique que $\bar{\Phi}$ est une fonction de \mathbf{y} et \mathbf{u} , et que $\bar{\Phi} = v_{1,0}$ admet une solution causale en $u_{1,0}$ qui linéarise le système.

A partir de ce résultat, il est possible d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution par retour de sortie statique sans retard.

Corollaire 3 [39] *Soit $\bar{\Phi}$ une fonction telle que*

$$span_{\mathbb{R}[\nabla]} \{d\bar{\Phi}\} + cls_{\mathbb{R}[\nabla]} \{dy_{1,0}\} = cls_{\mathbb{R}[\nabla]} \{dy_{1,0}, d\Phi_\rho\}$$

Le problème de linéarisation entrée-sortie admet une solution par retour de sortie statique sans retard si, et seulement si, les conditions i) et ii) du Théorème 14 sont satisfaites, et il existe un polynôme $p \in \mathbb{R}[\nabla]$ tel que

$$d\bar{\Phi} - p dy_{1,0} \in span_{\mathcal{K}} \{dy_{1,0}, du_{1,0}\}.$$

Les conditions de ce Corollaire sont vérifiables. En pratique, il est requis que $\bar{\Phi}$ s'écrive sous la forme

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}'(y_{1,0}, u_{1,0}) + p y_{1,0}, \quad p \in \mathbb{R}[\nabla].$$

4.3 Solutions par retour d'état

Considérons maintenant le même problème, mais en recherchant une solution dans la classe plus générale des bouclages d'état.

4.3.1 Solution par retour d'état statique

Le premier cas à être considéré est celui de systèmes ayant un degré relatif égal au nombre d'états. Ces sorties, sont connues aussi comme des *sorties plates* [45].

Théorème 15 [39] *Soit le système à retards Σ , avec degré relatif $\rho = n$. Le problème de linéarisation entrée-sortie peut être résolu par retour d'état dynamique avec retards si, et seulement si,*

$$cls_{\mathbb{R}[\nabla]} \{dy_{1,0}, d\dot{y}_{1,0}, \dots, dy_{1,0}^{(n)}\} \not\subset span_{\mathcal{K}[\nabla]} \{d\mathbf{x}_0, du_{1,1}\}.$$

La preuve de ce théorème (Annexe C), consiste à montrer que la condition précédente est équivalente à la relation

$$dy_{1,0}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i dy_{1,0}^{(i)} + \nabla^\mu d\bar{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad a_i \in \mathbb{R}[\nabla],$$

où $\partial\bar{\Phi}/\partial u_{1,0} \neq 0$, par définition de μ .

Le calcul effectif d'une base de $cls_{\mathcal{K}[\nabla]} \{span_{\mathcal{K}[\nabla]} \{dy_{1,0}, \dots, dy_{1,0}^{(n)}\}\}$ permet d'obtenir une telle fonction $\bar{\Phi}$ (non unique). C'est en imposant des restrictions sur son choix que l'on obtient des critères pour l'existence d'autres types de solutions.

Corollaire 4 *Le problème de linéarisation entrée-sortie admet une solution par retour d'état statique sans retard si, et seulement si, il existe une forme exacte $d\bar{\Phi} \in span_{\mathcal{K}} \{d\mathbf{x}_0, d\mathbf{u}_0\}$ telle que*

$$cls_{\mathbb{R}[\nabla]} \{dy_{1,0}, \dots, dy_{1,0}^{(n-1)}, d\bar{\Phi}\} = cls_{\mathbb{R}[\nabla]} \{dy_{1,0}, \dots, dy_{1,0}^{(n)}\}$$

On considère par la suite le cas le plus général où $\rho \leq n$. Pour cela, on écrit $y^{(\rho)}$ comme suit :

$$y_{1,0}^{(\rho)} := \varphi(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, u_{1,\mu}, \mathbf{x}_\mu, \dots, u_{1,\tau}, \mathbf{x}_\tau)$$

et on définit une fonction $\alpha_{1,0}$ regroupant tous les termes non “anticipatifs” par rapport à l'entrée u :

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0} &:= \delta^{-\mu} \varphi(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, u_{1,\mu}, \mathbf{x}_\mu, \dots, u_{1,\tau}, \mathbf{x}_\tau) \\ &= \varphi(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, u_{1,0}, \mathbf{x}_0, \dots, u_{1,\tau-\mu}, \mathbf{x}_{\tau-\mu}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Une condition suffisante est maintenant énoncée.

Proposition 4 *Considérons le système Σ , avec $\alpha_{1,0}$ définie par (4.7). Le problème de linéarisation entrée-sortie admet une solution par retour d'état statique avec retards, s'il existe un entier k tel que*

- i) $d\beta_{1,0} \in \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]}\{d\mathbf{x}\}$, et
- ii) $d\beta_{1,0}^{(k)} \in \text{span}_{\mathcal{R}[\nabla]}\{dy_{1,0}, \dots, dy_{1,0}^{(\rho+k-1)}, d\alpha_{1,0}, \dots, d\alpha_{1,0}^{(k-1)}\}$,

avec $\beta_{1,0} := y_{1,0}^{(\rho)} - \delta^\mu \alpha_{1,0}$.

Preuve. Annexe C ■

L'exemple suivant donne un indice pour affaiblir ces conditions.

Exemple 8 *Considérons le système*

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,0} &= x_{2,2}u_{1,2} \\ \dot{x}_{2,0} &= x_{1,0} + x_{1,2}^2 \\ y_{1,0} &= x_{1,0} + x_{2,1}\end{aligned}$$

pour lequel $\beta_{1,0}$ vaut $x_{1,0}$. Des calculs simples montrent que les conditions de la Proposition 4 ne sont pas satisfaites. Pourtant

$$\begin{aligned}\dot{y}_{1,0} &= x_{1,1} + x_{1,3}^2 + x_{2,2}u_{1,2} \\ &= y_{1,1} - x_{2,2} + x_{1,3}^2 + x_{2,2}u_{1,2},\end{aligned}$$

d'où

$$u_{1,0} = (v_{1,0} + x_{2,0} - x_{1,1}^2)/x_{2,0}$$

ce qui donne, en boucle fermée

$$\dot{y}_{1,0} = y_{1,1} + v_{1,2}.$$

Cette solution a été obtenue en utilisant le fait que le terme en avance par rapport à l'entrée n'était pas gênant, car il dépend linéairement de la sortie.

Ceci est formalisé comme suit.

Soit $\Phi(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{\bar{\mu}-1}, u_{1,\bar{\mu}}, \mathbf{x}_{\bar{\mu}}, \dots, u_{1,k}, \mathbf{x}_k)$ une fonction telle que

$$\text{span}_{\mathcal{R}[\nabla]}\{d\Phi\} + \text{cls}_{\mathcal{R}[\nabla]}\{dy_{1,0}, \dots, dy_{1,0}^{(\rho-1)}\} = \text{cls}_{\mathcal{R}[\nabla]}\{dy_{1,0}, \dots, dy_{1,0}^{(\rho)}\},$$

avec $\partial\Phi/\partial u_{1,\bar{\mu}} \neq 0$.

Un choix de $\alpha_{1,0}$ moins restrictif que (4.7) est

$$\alpha_{1,0} := \Phi(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, u_{1,0}, \mathbf{x}_0, \dots, u_{1,k-\bar{\mu}}, \mathbf{x}_{k-\bar{\mu}}).$$

4.3.2 Solution par retour d'état dynamique

Pour les systèmes sans retard à sortie unique, il est bien connu que l'existence d'une solution dynamique au problème de linéarisation implique qu'il existe aussi une solution statique. Ceci n'est plus vrai pour le cas des systèmes à retards, en raison de la contrainte supplémentaire de causalité.

Dans cette section, nous présenterons une condition suffisante pour résoudre le problème de linéarisation par retour d'état dynamique avec retards.

L'idée est d'examiner la structure de la dérivée de la sortie d'ordre supérieur $y_{1,0}^{(\rho+i)}$ au lieu de $y_{1,0}^{(\rho)}$. Ceci est illustré par l'exemple préliminaire suivant.

Exemple 9 *Considérons le système :*

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,0} &= u_{1,0} \\ \dot{x}_{2,0} &= x_{1,1} + x_{4,0} + x_{2,0} + x_{3,0} \\ \dot{x}_{3,0} &= x_{1,1}^2 \\ \dot{x}_{4,0} &= x_{2,0} \\ y_{1,0} &= x_{1,1} + x_{4,0},\end{aligned}$$

pour lequel des calculs simples montrent qu'il n'admet pas de solution statique causale. Cependant, si l'on continue à dériver la sortie on obtient :

$$\begin{aligned}y_{1,0}^{(2)} &= \dot{u}_{1,\mu} + x_{3,0} + y_{1,0} + \dot{y}_{1,\mu} - u_{1,\mu} \\ y_{1,0}^{(3)} &= \ddot{u}_{1,\mu} + x_{1,\mu}^2 + \dot{y}_{1,0} + \ddot{y}_{1,\mu} - \dot{u}_{1,\mu}\end{aligned}$$

Si l'on pose maintenant $y_{1,0}^{(3)} - \ddot{y}_{1,\mu} - \dot{y}_{1,0} = v_{1,\mu}$ on est conduit à définir le compensateur dynamique linéarisant suivant :

$$\begin{aligned}u_{1,0} &= \eta_{1,0} \\ \dot{\eta}_{1,0} &= \eta_{2,0} \\ \dot{\eta}_{2,0} &= v_{1,0} - x_{1,0}^2 + \eta_{2,0}.\end{aligned}$$

On vérifie que le système en boucle fermée est linéaire :

$$\bar{y}_{1,0}^{(3)} = \ddot{\bar{y}}_{1,1} + \dot{\bar{y}}_{1,0} + v_{1,1}.$$

La généralisation de ce résultat peut être énoncée comme suit.

Théorème 16 *Soit le système Σ . Le problème de linéarisation entrée-sortie admet une solution dynamique avec retards s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$cls_{R[\nabla]} \{dy_{1,0}, \dots, dy_{1,0}^{(\rho+k)}\} \not\subset span_{K[\nabla]} \{d\mathbf{x}_0, du_{1,0}, \dots, du_{1,0}^{(k-1)} du_{1,1}^{(k)}\}.$$

Preuve. Voir Annexe B. ■

4.4 Application à la poursuite de trajectoire

Dans cette section, on traite le problème de poursuite de trajectoire. Ce problème consiste à trouver une commande telle, que la sortie $y_{1,0}$ du système tende asymptotiquement vers une trajectoire de référence $\tilde{y}_{1,0}$.

Définition 36 (Problème de poursuite de trajectoire) *Considérons le système Σ avec une sortie y et soit \tilde{y} une fonction du temps continue. Trouver, si possible, une commande telle que l'écart entre la sortie du système et la fonction de référence $e := y_{1,0} - \tilde{y}_{1,0}$ soit stable à l'origine.*

Le problème de poursuite de trajectoire est très lié à la linéarisation entrée-sortie : la stabilité asymptotique de l'erreur $(y_{1,0} - \tilde{y}_{1,0})$ est, en effet, facilitée par la linéarisation (par bouclage) de l'erreur.

Théorème 17 *Soit le système Σ , avec une sortie $y_{1,0}$ et soit $\tilde{y}_{1,0}$ la trajectoire désirée pour la sortie. Le problème de poursuite de trajectoire admet une solution causale si*

- i) la relation entrée-sortie de Σ peut être linéarisée :

$$dy_{1,0}^{(k)} = \sum_i a_i dy_{1,0}^{(k-1)} + \sum_j b_j dv_{1,0}^{(j)}, \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}[\nabla],$$
- ii) la sortie en boucle fermée peut être stabilisée à l'origine, et
- iii) δ^μ divise tous les coefficients b_j .

Preuve. Les conditions i) et ii) impliquent l'existence d'un compensateur causal tel que, pour le système en boucle fermée,

$$\sum_{i=0}^k a'_i y_{1,0}^{(i)} = \delta^\mu \sum_{j=0}^{k-\rho} b'_j v_{1,0}^{(j)}, \quad b_{k-\rho} \neq 0$$

avec $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{1,0} = 0$ lorsque $v_{1,0} \equiv 0$.

Une solution est donnée par

$$\begin{aligned} v_{1,0} &= \eta_{1,0} \\ \dot{\eta}_{1,0} &= \eta_{2,0} \\ &\vdots \\ \dot{\eta}_{k-\rho-1,0} &= \eta_{k-\rho,0} \\ \dot{\eta}_{k-\rho,0} &= b_{k-\rho,\mu}^{-1} \left(\sum_{i=0}^k a'_i \tilde{y}_{1,-\mu}^{(i)} - \sum_{j=0}^{k-\rho-1} b'_j \eta_{j,0} \right) \end{aligned}$$

où $\tilde{y}_{1,-\mu}^{(i)}$ représente la i -ème dérivée par rapport au temps de la référence \tilde{y} , évaluée à l'instant $t + \mu$. ■

Exemple 10 Soit le système

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,0} &= u_{1,0} \\ \dot{x}_{2,0} &= -x_{2,0} + x_{1,1}^3 \\ y_{1,0} &= x_{2,0} + x_{1,1}\end{aligned}$$

Avec le compensateur causal suivant :

$$u_{1,0} = v_{1,0} - x_{1,0} - x_{1,0}^3$$

on obtient la relation linéaire entrée-sortie :

$$v_{1,1} = \dot{y}_{1,0} + y_{1,0}.$$

On définit maintenant

$$v_{1,0} = \tilde{y}_{1,-1} + \dot{\tilde{y}}_{1,-1} \quad (4.8)$$

et on obtient, en boucle fermée :

$$\dot{y}_{1,0} - \dot{\tilde{y}}_{1,0} = -(y_{1,0} - \tilde{y}_{1,0})$$

ce qui implique que l'écart entre la sortie et la fonction de référence $y_{1,0} - \tilde{y}_{1,0}$ tende asymptotiquement vers 0.

Remarque 13 Le fait d'avoir utilisé des valeurs futures de \tilde{y} dans (4.8) ne met pas en cause la causalité de la solution proposée, car la fonction de référence \tilde{y} et ses dérivées sont connues à l'avance.

4.5 Synthèse d'observateurs

Dans cette section on va utiliser les résultats sur la linéarisation par injections additives de sortie, pour construire des observateurs pour une classe particulière de systèmes. Seulement des étapes préliminaires seront étudiées.

Avant d'aborder la synthèse des observateurs, on va donner une notion d'observabilité, et proposer une classe d'observateurs.

Définition 37 Le système Σ est dit observable, si tout l'état \mathbf{x}_0 peut être exprimé en fonction des dérivés de la sortie, de l'entrée, et leurs valeurs futures :

$$\delta^\tau \mathbf{x}_0 = \varphi(\mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{u}^{(\ell)}, k, \ell \in \mathbb{N})$$

pour un $\tau \in \mathbb{N}$.

A partir de cette définition, il est simple de montrer que, si le système Σ est observable, alors il existe un entier $\tau \in \mathbb{N}$ tel que

$$\text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{d\mathbf{x}_\tau\} \subset \mathcal{O}$$

où $\mathcal{O} := \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{d\mathbf{x}_0\} \cap (\text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{d\mathbf{y}_0, d\dot{\mathbf{y}}_0, \dots\} + \text{span}_{\mathcal{K}[\nabla]} \{d\mathbf{u}_0, d\dot{\mathbf{u}}_0, \dots\})$. Dans le cas particulier de systèmes sans retard, \mathcal{O} est l'espace d'observabilité.

Définition 38 *On dit que le système dynamique*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_0 &= \gamma(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \\ \delta^\tau \hat{\mathbf{x}}_0 &= \varphi(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

est un observateur pour le système Σ , si $e_\tau(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, où $e_\tau(t) := \delta^\tau \hat{\mathbf{x}}_0 - \delta^\tau \mathbf{x}_0$, pour un $\tau \in \mathbb{N}$.

Admettons maintenant que le système soit linéarisable par injections additives d'entrée-sortie avec $\bar{n} = n$. A partir de l'Algorithme 4 (cf. §4.2), on a

$$dy_{1,0}^{(k-1)} = dh_k(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^k d\phi_i^{(k-i)}(\mathbf{y}, \mathbf{u}), \quad k = 1 \dots, n$$

Pour un système sans retard, ceci est une condition suffisante pour l'existence d'un observateur [49]. Pour montrer que cela n'est pas toujours le cas pour les systèmes à retards, considérons un système avec un seul état $x_{1,0}$, et les sorties $y_{1,0} = x_{1,1}$ et $y_{2,0} = x_{1,0} + x_{1,1}$. Avec la première sortie, on ne peut pas connaître la valeur de x_1 à l'instant t , mais à l'instant $t - 1$:

$$x_{1,1} = y_{1,0}$$

Dans le deuxième cas, on ne peut connaître la valeur de x_1 à partir de $y_{2,0}$ que si l'on dispose des conditions initiales :

$$x_{1,0} = y_{2,0} - x_{1,1}$$

Ce deuxième cas n'est pas observable au sens de la Définition 37.

Dans le but de trouver des conditions suffisantes pour la synthèse d'un observateur, on choisit des fonctions $\{\xi_{1,0}, \dots, \xi_{n,0}\}$ telles que

$$\text{span}_{\mathcal{R}[\nabla]} \{d\xi_{1,0}, \dots, d\xi_{n,0}\} = \text{cls}_{\mathcal{R}[\nabla]} \{dh_1(\mathbf{x}), \dots, dh_n(\mathbf{x})\},$$

et on écrit

$$\begin{bmatrix} dh_1 \\ \vdots \\ dh_n \end{bmatrix} = T[\nabla] \begin{bmatrix} d\xi_{1,0} \\ \vdots \\ d\xi_{n,0} \end{bmatrix}, \quad T[\nabla] \in \mathcal{R}^{n \times n}[\nabla]. \quad (4.9)$$

La forme de Smith de la matrice $T[\nabla]$ permet d'identifier des systèmes qui ne sont pas observables, car une condition nécessaire est que tous les polynômes invariants soient des monômes : dans l'exemple précédent, $T[\nabla] = [\nabla]$ pour $y_{1,0}$ et $T[\nabla] = [1 + \nabla]$ pour $y_{2,0}$.

On arrive au résultat suivant (*cf.* Annexe C).

Théorème 18 *Considérons le système Σ , et admettons qu'il soit linéarisable par $\phi_i(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ -injections. Soient $T[\nabla]$ et ξ donnés par (4.9). Si*

i) ξ est un changement bicausal de coordonnées pour \mathbf{x} :

$$\xi_0 = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}_0 = \varphi^{-1}(\xi), \quad \text{et}$$

ii) $\text{Smith}\{T[\nabla]\} = \text{diag}\{\nabla^{\mu_i}\}, \mu_i \in \mathbb{N}$,

alors

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_0 &= A(\nabla)\hat{\xi}_0 + \phi(\mathbf{y}, \mathbf{u}) - k(\nabla)(y_{1,0} - C(\nabla)\xi_0) \\ \hat{\mathbf{x}}_0 &= \varphi^{-1}(\hat{\xi}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

où $A(\nabla) + k(\nabla)C(\nabla)$ est une matrice stable, est un observateur pour le système Σ .

La stabilité d'une matrice $\tilde{A}(\nabla)$ est dans le sens où toute solution de

$$\dot{x} = \tilde{A}(\nabla)x$$

est stable pour toute condition initiale.

4.6 Lien avec d'autres travaux

Nos contributions par rapport au problème de linéarisation par compensation causale pour les systèmes à retards sont résumés dans le Tableau 4.1.

En dehors de nos travaux, on trouve dans la littérature une première contribution faite par Germani *et al.* dans les cas monovariable [19] et multivariable [20]. Ces travaux ont été faits dans un cadre géométrique, et sont valables pour des systèmes observables ayant un décalage relatif $\mu = 0$, ce qui est très restrictif.

La notion d'observabilité présentée dans ce rapport ramenée au cas linéaire, est plus restrictive que l'observabilité faible, et sa relation avec les autres notions d'observabilité disponibles reste à établir.

Compensateur	statique avec retards	Statique sans retard	Dynamique
Retour de sortie	CNS	CNS	CS
Retour d'état			
$\rho = n$	CNS	CNS	–
$\rho < n$	CS*	CS	CS

CNS : Condition nécessaire et suffisante,

CS : Condition suffisante,

***** : plus faible que celle proposée dans [19].

TAB. 4.1 – Solutions proposées pour la linéarisation entrée–sortie

Finalement, le problème de poursuite de trajectoire a été traité dans [65] pour une classe particulière de systèmes avec retards dans l'entrée de commande. Leur approche passe également par la linéarisation entrée–sortie du système, et la stabilité est assurée au moyen des théories de Lyapunov et Razumikhin.

4.7 Conclusions

Dans ce Chapitre, on a considéré la linéarisation d'un système à retards (monovariante) par deux moyens :

- injections de sortie, et
- bouclage (statique et dynamique).

Pour la linéarisation par injections de sortie, un critère d'existence d'une solution a été donné.

En ce qui concerne la linéarisation par bouclage, une solution complète par retour statique de sortie a été présentée, et des conditions suffisantes pour l'existence de solutions par retour d'état statique et dynamique ont été développées.

On a montré aussi que, lorsqu'un système peut être linéarisé, et que la théorie sur la stabilisation de systèmes linéaires à retards nous permet d'assurer une relation entrée–sortie stable, on peut définir une dynamique d'erreur qui hérite cette stabilité. Ceci nous a permis d'aborder deux sujets particuliers : la synthèse d'un observateur et la poursuite de trajectoire.

Conclusion et perspectives

L'analyse structurelle des systèmes non linéaires à retards fut, à quelques exceptions près [14, 21], un domaine de recherche inexploré. L'ambition de cette thèse fut de développer quelques résultats pionniers dans ce domaine.

Les difficultés inhérentes au domaine furent en partie dûes à l'absence d'une approche mathématique adaptée. Dans cette mesure, une contribution majeure de ce travail a été le développement d'un formalisme adapté à l'étude de ces systèmes.

Ce formalisme a été largement inspiré de résultats connus pour les systèmes sans retard, notamment l'approche dite différentielle-algébrique, et de résultats valables pour les systèmes linéaires à retards modélisés sur un anneau. Pourtant, il est loin d'en être une banale extension : le module introduit dans le premier Chapitre est défini sur un anneau non commutatif, et pour lequel la multiplication est définie d'une façon très particulière, non considérée jusqu'à présent dans la littérature. De ces faits, chaque propriété, même les plus élémentaires (standards pour les espaces vectoriels ou les modules commutatifs) et chaque définition doivent être établies et revues.

Cette approche a été utilisée pour s'attaquer à divers problèmes de l'analyse et la commande d'une classe étendue de systèmes à retards.

D'abord, dans le Chapitre 2, on s'est intéressé à deux aspects structurels : l'accessibilité et la recherche de systèmes inverses. Pour le premier, on a donné une condition suffisante (vérifiable par un nombre réduit de calculs) et dont la nécessité demeure une conjecture : l'intégrabilité de \mathcal{H}_∞ suffirait à le prouver. L'inversion de systèmes nous a mené à faire une extension de l'algorithme dit *de structure*. Ceci nous a permis de donner des conditions pour l'existence d'un inverse. Ces conditions sont plus fortes que celles que l'on trouve dans la littérature [14], mais elles sont constructives.

Puis, dans le troisième Chapitre, on s'est intéressé au problème de rejet de perturbations. Une solution complète par retour d'état bicausal a été donnée,

et de conditions suffisantes pour l'existence de plusieurs types de solutions (statiques et dynamiques) ont été proposées. Ces résultats se distinguent des autres trouvés dans la littérature car :

- ils sont valables sous des hypothèses non restrictives,
- ils ne résultent pas d'approximations telles que la linéarisation ou la discrétisation.

Finalement, dans le quatrième Chapitre, la linéarisation de systèmes a été traitée. Deux types de linéarisation ont été considérés :

- par injections de sortie, et
- par bouclage.

Dans le premier cas, une solution complète a été présentée. Pour le deuxième cas, une solution complète par retour statique de sortie a été trouvée. Des conditions suffisantes pour l'existence d'un retour d'état statique résolvant le problème ont été obtenues dans le cas des systèmes dont le degré relatif de la sortie est égal à la dimension de l'état. De plus, dans le cas plus général où aucune hypothèse est faite sur la sortie, des conditions garantissant l'existence des plusieurs types de solutions par retour d'état ont été données.

Tous ces résultats motivent la poursuite des recherches dans le cadre de cette approche : malgré la complexité importante inhérente à son développement, ses possibilités d'application ont été démontrées par les premiers résultats donnés dans les Chapitres 2 à 4. Ceci ouvre un axe de recherche qui s'avère fécond pour d'autres problèmes tels que le découplage, par exemple.

Une caractéristique importante des résultats apportés par ce travail, est la possibilité de mise en œuvre effective : toutes les conditions présentées peuvent être vérifiées en pratique, et leur programmation dans des langages de calcul formel a été mise en œuvre en partie.

Finalement, même si cette approche n'est pas directement adaptée pour étudier la stabilité, on peut passer par de formes particulières (linéarisation, formes triangulaires,...) et les associer aux résultats connus sur la stabilisation pour assurer la stabilité du système compensé, tel qu'il est fait dans le cas de systèmes sans retard.

Bibliographie

- [1] G. Abdallah, P. Dorato, J. Benitez-Read, and R. Byrne. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. In *Proc. American Control Conf.*, pages 3106–3107, 1993.
- [2] Ja. Alvarez and Jq. Alvarez. Disturbance rejection of time delay systems. In *IFAC World Congress*, pages 379–382, Sydney, July 1993.
- [3] E. Aranda-Bricaire, Ü. Kotta, and C.H. Moog. Linearization of discrete-time systems. *SIAM J. Control & Opt.*, 34 :1999–2023, 1996.
- [4] E. Aranda-Bricaire, C.H. Moog, and J.-B. Pomet. A linear algebraic framework for dynamic feedback linearization. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40 :127–132, 1995.
- [5] J. Assan. *Analyse et synthèse de l’approche géométrique pour les systèmes linéaires sur un anneau*. PhD thesis, Université de Nantes, 1999.
- [6] K. Balachandran and D. Somasundaram. Controllability of nonlinear systems consisting of a bilinear mode with time-varying delays in control. *Automatica*, 30 :257–258, 1984.
- [7] R. Castro-Linares, C.H. Moog, and M. Velasco-Villa. Bi-causal solutions to the disturbance decoupling problem for time-delay nonlinear systems. In *36th IEEE Conf. on Dec. Ctrl.*, San Diego, Dec 1997.
- [8] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick. *Analysis, manifolds and physics*, volume Part I : Basics. Elsevier Science Publishers (North-Holland), The Netherlands, rev. edition, 1982.
- [9] P.M. Cohn. *Free rings and their relations*. LMS Monographs. Academic Press, Belfort College, London, 2 edition, 1985.
- [10] G. Conte, C.H. Moog, and A.M. Perdon. *Nonlinear Control Systems : an algebraic setting*, volume 242b of *Lect. Notes Control and Inf. Sciences*. Springer–Verlag, 1999.
- [11] G. Conte and A.M. Perdon. Systems over principal ideal domains. a polynomial approach. *SIAM J. Control & Opt.*, 20, 1982.

- [12] G. Conte and A.M. Perdon. The disturbance decoupling problem for systems over a ring. *SIAM J. Control & Opt.*, 33(3) :750–764, May 1995.
- [13] A. Van der Schaft. *L_2 -Gain and passivity techniques in Nonlinear Control*. Springer-Verlag, London, 1996.
- [14] M. Fliess. *Some remarks on nonlinear input-output systems with delays*, volume 122, chapter II, pages 172–181. New Trends in Nonlinear Control Theory. Springer-Verlag, 1989.
- [15] M. Fliess, J. Levine, P. Martin, and P. Rouchon. A remark on nonlinear accessibility conditions and infinite prolongations. *Syst. & Ctrl. Lett.*, 31(2) :77–83, 1997.
- [16] M. Fliess and H. Mounier. Interpretation and comparison of various types of delay system controllabilities. In *IFAC Conf. Syst. Struct. & Ctrl.*, pages 330–335, Nantes, France, 1995.
- [17] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, and J. Rudolph. Examples of linear systems with delays. In *Analyse et commande des systèmes avec retards*, pages 1–17, Nantes, France, March 1996. LAN (actual Institut de Rech. en Comm. et Cyb. de Nantes).
- [18] F.R. Gantmacher. *Théorie des matrices*, volume 1 of *Collection universitaire de mathématiques*. Dunod, Paris, 1966.
- [19] A. Germani, C. Manes, and P. Pepe. Linearization of input–output mapping for nonlinear delay systems via static state feedback. In *Symp. On Modeling Analysis & Stim.*, pages 599–602, Lille, France., 1996.
- [20] A. Germani, C. Manes, and P. Pepe. Linearization and decoupling of nonlinear delay systems. In *Proc. of the Amer. Ctrl. Conf.*, pages 1948–1952, Philadelphia, USA, 1998.
- [21] A. Germani, C. Manes, and P. Pepe. Local asymptotic stability for nonlinear state feedback delay systems. In *6th IEEE Med. Conf. On Ctrl. Syst.*, Alghero, Italy, Jun 1998.
- [22] B. Hartley and T.O. Hawkes. *Rings, modules and linear algebra*. Chapman and Hall, 1970.
- [23] R. Herman and A. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 22 :728–740, 1977.
- [24] A. Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1989.
- [25] A. Isidori and A. Ruberti. On the synthesis of linear input–output responses for nonlinear control systems. *Syst. & Ctrl. Lett.*, 4 :17–22, 1984.

- [26] J. Jezek. Non-commutative rings of fractions in algebraical approach to control theory. *Kybernetika*, 32(1) :81–94, 1996.
- [27] J. Jezek. Rings of skew polynomials for algebraic approach to control theory. *Kybernetika*, 32(1) :63–80, 1996.
- [28] E.W. Kamen. On an algebraic theory of systems defined by convolution operators. *Math. Systems Theory*, 9 :57–74, 1975.
- [29] S. Mac Lane and G. Birkhoff. *Algebra*. MacMillan, London, 1967.
- [30] E.B. Lee, S. Neftci, and A. Olbrot. Canonical forms for time delay systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 27(1) :128–132, 1982.
- [31] E.B. Lee and A. Olbrot. Observability and related structural results for linear hereditary systems. *Intl. J. of Control*, 34(6) :1061–1078, 1981.
- [32] J.J. Loiseau. A 2-d transfer without minimal realization. In *IMACS Intl. Symp. Signal Proc., Robotics, and Neural Networks*, Lille, France, 1994.
- [33] M. Malabre and R. Rabah. Structure at infinity, model matching and disturbance rejection for linear systems with delays. *Kybernetika*, 29 :485–498, 1993.
- [34] M. Marcus. *Introduction to modern algebra*. Marcel Decker inc., New York, 1978.
- [35] L.A. Márquez-Martínez. Note sur l’accessibilité des systèmes non linéaires à retards. *C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I*, (329) :545–550, 1999.
- [36] L.A. Márquez-Martínez and J. Assan. The disturbance rejection problem for systems with delays : Geometric approach versus algebraic approach. In *MTNS*, Perpignan, France, 6 2000.
- [37] L.A. Márquez-Martínez and C.H. Moog. On the input-output linearization of nonlinear time-delay systems. In *IFAC Conf. Syst. Struct. & Control*, volume 3, pages 575–580, Nantes, 7 1998.
- [38] L.A. Márquez-Martínez and C.H. Moog. New results on the analysis and control of nonlinear time-delay systems. In *IEEE Conf. on Dec. Ctrl.*, Phoenix, USA, 12 1999.
- [39] L.A. Márquez-Martínez and C.H. Moog. Accessibility and feedback linearization of nonlinear time-delay systems. *SIAM J. Control & Opt.*, Submitted.
- [40] L.A. Márquez-Martínez, C.H. Moog, and M. Velasco-Villa. The structure of nonlinear time-delay systems. In A. Tornambé, editor, *6th IEEE Med. Conf. on Control and Systems*, Alghero, Italy, 6 1998. WSP.

- [41] L.A. Márquez-Martínez, C.H. Moog, and M. Velasco-Villa. The structure of nonlinear time-delay systems. *Kybernetika*, 36(1) :53–62, 2000.
- [42] C.H. Moog, R. Castro-Linares, M. Velasco-Villa, and L.A. Márquez-Martínez. Disturbance decoupling for time-delay nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 48(2) :305–309, 2 2000.
- [43] A.S. Morse. Ring models for delay-differential systems. *Automatica*, 12(5) :529–531, 1976.
- [44] H. Mounier, J. Rudolph, M. Fliess, and P. Rouchon. Tracking control of a vibrating string with an interior mass viewed as delay system. *ESIAM : Ctrl., Opt. & Calculus of Variations*, 3 :315–321, September 1998.
- [45] H. Mounier and R. Rudolph. Flatness based control of nonlinear delay systems : A chemical reactor example. *Intl. J. of Control*, 71 :871–890, 1998.
- [46] S.I. Niculescu. h_∞ memoryless control with α -stability constraint for time-delays systems : an lmi approach. In *Proc. of the 34th CDC*, pages 1507–1512, New Orleans, USA, 1995.
- [47] H. Nijmeijer and A. Van der Schaft. *Nonlinear dynamical control systems*. Springer, New York, 1990.
- [48] P. Picard. *Sur l’observabilité et la commande des systèmes linéaires à retards modélisés sur un anneau*. PhD thesis, Université de Nantes, France, 1996.
- [49] F. Plestan. *Linéarisation par injection d’entrée-sortie généralisée et synthèse d’observateurs*. PhD thesis, Université de Nantes / Ecole Centrale de Nantes, 1995.
- [50] J.-F. Pommaret. Problèmes formels en théorie du contrôle aux dérivées partielles. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 308 :457–460, 1989.
- [51] J.F. Pommaret and A. Quadrat. Generalized bezout identity. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 9 :91–116, 1998.
- [52] M. Sebek. Asymptotique tracking for 2-d and delay-differential systems. *Automatica*, 24(5) :711–713, 1988.
- [53] O. Sename. *Sur la commandabilité et le découplage des systèmes linéaires à retards*. PhD thesis, Université de Nantes, France, 1994.
- [54] L.M. Silverman. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 14 :270–276, 1969.
- [55] L.M. Silverman and H.M. Meadows. Controllability and observability in time-variable linear systems. *SIAM J. Control & Opt.*, 5 :64–73, 1967.

- [56] S.N. Singh. A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 26 :595–598, 1981.
- [57] O.J.M. Smith. Closer control of loops with deadtime. *Chem. Eng. Proc.*, 53 :217–221, 1957.
- [58] H. Sussmann and V. Jurdjevic. Controllability of nonlinear systems. *J. Differ. Eq.*, 12 :95–116, 1972.
- [59] S.G. Tzafestas and P.N. Paraskevopoulos. On the decoupling of multivariable control systems with time delays. *Intl. J. of Control*, 17(2) :405–415, 1973.
- [60] M. Velasco, Ja. Alvarez, and R. Castro. Approximate disturbance decoupling for a class of nonlinear time delay systems. In *Amer. Control Conf.*, pages 1046–1050, San Fco., USA, 1993.
- [61] M. Velasco, Ja. Alvarez, and R. Castro. On the disturbance decoupling problem for a class of nonlinear time delay systems. In *32nd Conf. on Dec. Ctrl.*, San Antonio Texas, USA, 1993.
- [62] M. Velasco-Villa. *Disturbance decoupling for time delay systems*. PhD thesis, CINVESTAV–IPN, México D.F., 1994.
- [63] M. Vidyasagar. *Control system synthesis : a factorization approach*. Cambridge, M.I.T. Press., 1985.
- [64] E. Weisstein. *Eric Weisstein's World of Mathematics*. Wolfram Research, Inc., 2000.
- [65] W. Wu and Y.S. Chou. Output tracking control of uncertain nonlinear systems with an input time delay. *IEE Proc.–Control Theory Appl*, 143(4), 7 1996.
- [66] X. Xia and C.H. Moog. I/o linearization of nonlinear systems by output feedback. In *35th Conf. on Dec. Ctrl.*, Kobe, Japan, 1996.

Annexe A

Note technique pour la revue *IEEE Transactions on Automatic Control*

The disturbance decoupling problem for time-delay systems

C.H. Moog, R. Castro-Linares, M. Velasco-Villa, et L.A. Márquez-Martínez.

Annexe B

Article pour le congrès IEEE MCCS à Alghero, Italie, avril 1998

The structure of nonlinear time-delay systems

L.A. Márquez-Martínez, C.H. Moog, et M. Velasco-Villa

Annexe C

Rapport interne

Accessibility and feedback linearization of nonlinear time-delay systems

L.A. Márquez-Martínez et C.H. Moog

Annexe D

Article pour le congrès MTNS, à Perpignan, France, juin 2000

Disturbance rejection for systems with delays : geometric
approach versus algebraic approach

L.A. Márquez-Martínez et J. Assan

Annexe E

Article pour l'atelier sur les systèmes à retards LTDS 2000, à Ancône, Italie, septembre 2000

Observability and observers for nonlinear systems with
time delays

L.A. Márquez-Martínez, C.H. Moog, et M. Velasco-Villa